Problemas – Tema 3

Problemas resueltos - 7 - ampliación a monotonía y a diferencia entre extremos relativos y absolutos

1. Sea la función $f(x)=2x+sen(2x)$. Estudiar su monotonía y la existencia de extremos absolutos y relativos en el intervalo $[0,\pi]$.

El dominio de la función es toda la recta real, por ser suma de polinomios y de función seno.

Derivamos e igualamos a cero para obtener los candidatos a extremos relativos.

$$f'(x)=2+2\cos(2x) \quad , \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad \cos(2x)=-1$$

El coseno vale -1 cuando el ángulo es 180º, o lo que es lo mismo, π radianes (más todas las vueltas completas de 360º).

$$2\text{x}=\pi \ + \ k2\pi, \ k\in\mathbb{Z}$$

$$x=\frac{\pi}{2} \ + \ k\pi, \ k\in\mathbb{Z}$$ → Candidatos a extremos relativos

Tenemos infinitos candidatos a extremos relativos. Dentro del intervalo $[0,\pi]$ solo consideramos el ángulo $x=\frac{\pi}{2}$ radianes.

Evaluamos la derivada en un punto a la izquierda de π/2 y en un punto a la derecha de π/2, dentro del intervalo abierto (0, π). Recordar que estamos trabajando con radianes como medida de ángulos.

$$f'(1)=2+2\cos(2)=1{,}17>0$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2-1=1>0$$

Es decir, a ambos lados del candidato a extremo relativo la función siempre es estrictamente creciente por lo que no tenemos extremo relativo.

Si un punto crítico no es extremo relativo, será punto de inflexión. El problema no nos pide que demostremos que $x=\frac{\pi}{2}$ es un punto de inflexión, pero vamos a comprobarlo para practicar.

Calculemos la segunda derivada e igualemos a cero (condición necesaria para punto de inflexión).

$$f''(x)=-4\,sen(2x) \quad , \quad f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad sen(2x)=0$$

El seno vale 0 para 0º (0 radianes) y 180º (π radianes), más todas las vueltas completas de 360º. De forma compacta podemos presentar las infinitas soluciones de la siguiente forma.

$$2x = k\pi\,, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$x = k\dfrac{\pi}{2}, \quad k \in \mathbb{Z}$ → Candidatos a puntos de inflexión.

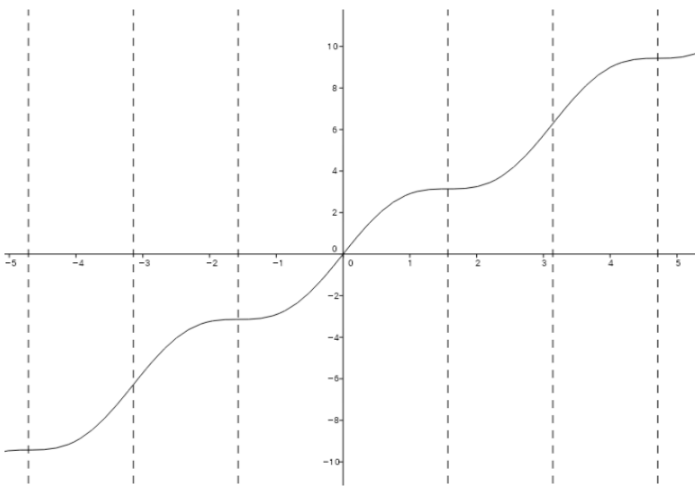
Podemos evaluar la segunda derivada a la izquierda y a la derecha de los puntos candidatos a puntos de inflexión. Si al evaluar la segunda derivada es positiva, tendremos una función convexa U. Y si la segunda derivada es negativa, es cóncava ∩.

Si hay cambio de curvatura alrededor de un punto que anuló la segunda derivada, podremos decir que estamos ante un punto de inflexión.

Evaluando a la derecha y a la izquierda de cada candidato a punto de inflexión, comprobamos que 0º, 180º, 360º, etc. son efectivamente puntos de inflexión.

$$f''(-1) = -4\,sen(-2) = 3{,}63 > 0 \rightarrow convexa \ \cup$$
$$f''(0) = -4\,sen(0) = 0$$
$$f''(1) = -4\,sen(2) = -3{,}63 < 0 \rightarrow cóncava \ \cap$$
$$f''(\pi/2) = -4\,sen(\pi) = 0$$
$$f''\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -4\,sen\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 3{,}46 > 0 \rightarrow convexa \ \cup$$
$$f''(\pi) = -4\,sen(2\pi) = 0$$
$$f''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -4\,sen\left(\frac{5\pi}{2}\right) < 0 \rightarrow cóncava \ \cap$$

Existen puntos de inflexión en los puntos: (0, 0), (π/2, π), (π, 2π), (3π/2, 3π), (2π, 4π), etc. La representación gráfica muestra los puntos de inflexión de la función.



Como no tenemos extremos relativos, para obtener los extremos absolutos en el intervalo $[0,\pi]$ debemos calcular la imagen de la función para $x=0$ y para $x=\pi$.

$$f(x)=2x+sen(2x)$$
$$f(0)=2\cdot 0+sen(2\cdot 0)=0$$
$$f(\pi)=2\cdot\pi+sen(4\pi)=2\pi$$

Conclusión: $x=0$ es el mínimo absoluto y $x=\pi$ es el máximo absoluto en el intervalo $[0,\pi]$.

2. ¿Cuál debe ser el grado mínimo de un polinomio para que la gráfica de su función presente tres extremos relativos?

El polinomio debe ser, al menos, de grado cuatro. Porque su derivada será un polinomio de grado tres que, al igualar a cero, puede contar con al menos tres soluciones (tres puntos críticos). Y esos tres puntos críticos pueden convertirse en extremos relativos.

3. ¿Puede tener un polinomio de grado tres extremos absolutos si consideramos como dominio toda la recta real?

No, imposible. Si el dominio del polinomio de grado tres es toda la recta real, su imagen también será toda la recta real (todos los polinomios de grado impar tienen como imagen toda la recta real).

Y si la imagen es todo $\mathbb{R}$ no habrá ningún valor con la imagen más grande ni con la imagen más pequeña posible.

4. Sea $f(x)=\frac{1}{4-x^2}$ **. Hallar su máximo y su mínimo absolutos en el intervalo** $[-1,1]$ **.**

El dominio de la función es toda la recta real salvo los valores $x=\pm 2$, por anular al denominador del cociente de polinomios.
Los extremos relativos de la función se obtienen derivando e igualando a cero → $f'(x)=0$.

$$f'(x)=\frac{2x}{(4-x^2)^2}$$
$$2x=0 \rightarrow x=0$$

En el punto $(0,\frac{1}{4})$ tenemos un candidato a extremo relativo.

Si calculamos la segunda derivada y evaluamos para $x=0$, tendremos:

$f''(x)=\frac{6x^2+8}{(4-x^2)^3}$, $f''(0)=8>0$ → $(0,\frac{1}{4})$ es un mínimo relativo

Si evaluamos la función en $x=-1$ y en $x=1$ obtenemos las siguientes imágenes:

$$x=-1 \rightarrow f(-1) \rightarrow (-1,\frac{1}{3})$$

$$x=1 \rightarrow f(1) \rightarrow (1,\frac{1}{3})$$

Conclusión: $(0,\frac{1}{4})$ es un mínimo absoluto (imagen más pequeña), mientras que $(1,\frac{1}{3})$ y $(-1,\frac{1}{3})$ son dos máximos absolutos (imágenes más grande) en el intervalo $[-1,1]$.

5. Sea $f:[\frac{1}{e},4]\to\mathbb{R}$ **la función definida por** $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x)+a & si \quad \frac{1}{e}\leqslant x\leq 2 \\ bx+1-\ln(2) & si \quad 2<x\leq 4 \end{cases}$ **.**

a) Calcula los valores de a **y** b **sabiendo que** $f(x)$ **es derivable en el intervalo** $(\frac{1}{e},4)$ **.**

b) Para $a=0$ **y** $b=\frac{1}{2}$ **halla los extremos absolutos de** $f(x)$ **(abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).**

a) Como nos dicen que es derivable en el intervalo $(\frac{1}{e},4)$ sabemos que es continua y derivable en todo su dominio, incluido el punto frontera $x=2\in(\frac{1}{e},4)$

Estudiemos las condiciones de continuidad en el punto frontera.

$\exists f(2)=2-\ln(2)+a$

Los límites laterales en $x=2$ deben coincidir y converger a un valor finito, que debe ser igual al valor $f(2)$. Por lo tanto:

$$L^{-}=2-\ln(2)+a$$
$$L^{+}=2b+1-\ln(2)$$

Igualamos los límites laterales y llegamos a la conclusión: $a=2b-1$

Además, la función en $x=2$ coincide con el valor del límite:

$$f(2)=L \quad \to \quad 2-\ln(2)+a=2-\ln(2)+a$$

Por ser derivable, el límite izquierdo en $x=2$ en la derivada debe ser igual al límite derecho en $x=2$ en la derivada. Calculamos la derivada en los intervalos abiertos, y luego aplicamos estas condiciones en el punto $x=2$.

$$f'(x)=\begin{cases} 1-\frac{1}{x} & si \quad \frac{1}{e}<x<2 \\ b & si \quad 2<x<4 \end{cases} \quad \to \quad f'(2^{-})=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2} \quad , \quad f'(2^{+})=b \quad \to \quad b=\frac{1}{2} \quad \to \quad a=0$$

b) La función a estudiar es $f(x)=\begin{cases} x-\ln(x) & si \quad \frac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \frac{x}{2}+1-\ln(2) & si \quad 2<x\leq 4 \end{cases}$.

Y su derivada es $f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & si \quad \dfrac{1}{e}<x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad 2\leq x<4 \end{cases}$, donde hemos cerrado el intervalo a izquierda y derecha de $x=2$ ya que en el apartado anterior hemos demostrado que para $a=0$ y $b=\dfrac{1}{2}$ la función es derivable en ese punto.

Vamos a comprobar si es derivable en $x=\dfrac{1}{e}$ por la derecha (ya que a la izquierda de ese punto no está definida la función) y en $x=4$ por la izquierda (ya que a la derecha de ese punto no está definida la función). Recordando que una función es derivable por la izquierda (o por la derecha) en un punto si existe y es finito el valor de la derivada por la izquierda (o por la derecha) en ese punto.

$$f'(\frac{1}{e}^{+})=1-e \quad , \quad f'(4^{-})=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f'(x)=\begin{cases} 1-\dfrac{1}{x} & si \quad \dfrac{1}{e}\leq x\leq 2 \\ \dfrac{1}{2} & si \quad 2\leq x\leq 4 \end{cases}$$

Los extremos absolutos de la función en el intervalo cerrado $[\dfrac{1}{e},4]$ se alcanza en aquellos puntos donde la función obtenga el mayor o el menos valor dentro del intervalo. Y esto puede ocurrir en los extremos del intervalo y en los puntos críticos (valores que anulan la primera derivada).

$f(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}-\ln(\frac{1}{e})=\frac{1}{e}+1\simeq 1{,}37$ → Punto $(\frac{1}{e},\ 1{,}37)$

$f(4)=2+1-\ln(2)=3-\ln(2)\simeq 2{,}31$ → Punto $(4,\ 2{,}31)$

Si igualamos la derivada a 0 obtenemos → $f'(x)=0$. Es decir:

Intervalo $\frac{1}{e}\leq x<2 \quad \rightarrow \quad 1-\frac{1}{x}=0 \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \rightarrow \quad f(1)=1-\ln(1)=1$ → Punto $(1,1)$

Intervalo $2\leq x\leq 4 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}=0$ → Absurdo matemático → No hay punto crítico.

Conclusión: mínimo absoluto en $(1,1)$ y máximo absoluto en $(4,\ 2{,}31)$.

6. Sabiendo que el dominio de la función $f(x)=\frac{1}{e^x-x}$ son todos los números reales, obtener sus extremos relativos y absolutos en todo su dominio de definición.

Condición necesaria de extremo relativo: primera derivada nula.

$$f(x)=\frac{1}{e^x-x} \rightarrow f'(x)=\frac{-e^x+1}{(e^x-x)^2} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow e^x=1 \rightarrow x=0 \rightarrow \text{punto crítico}$$

$$f''(x)=\frac{-e^x(e^x-x)^2-(-e^x+1)2(e^x-x)(e^x-1)}{(e^x-x)^4}$$

$$f''(x)=\frac{-e^x(e^x-x)-(-e^x+1)2(e^x-1)}{(e^x-x)^3}=\frac{-e^x(e^x-x)+2(e^x-1)}{(e^x-x)^3}$$

$f''(0)=-1<0 \rightarrow (0,1)$ máximo relativo

Al ser el único extremo relativo en toda la recta real, este máximo relativo también será máximo absoluto de la función.

7. Sea la función $f(x)=x^2-8\ln(x)$ **definida en** $f:1\to+\infty$ **.**

a) Estudia intervalos de crecimiento y decrecimiento.

b) Calcula los extremos absolutos y relativos de la función, y obtener el valor de la ordenada en cada extremo.

c) Estudia los intervalos de concavidad y convexidad.

d) ¿Posee asíntota oblicua la gráfica de la función? Justificar la respuesta.

a) El dominio de la función es $Dom(f)=x\geq 1$, según nos dice el enunciado.

Derivamos e igualamos a cero para obtener puntos críticos.

$$f(x)=x^2-8\ln(x) \;\to\; f'(x)=2x-\frac{8}{x}=\frac{2x^2-8}{x} \quad , \quad f'(x)=0 \;\to\; 2x^2-8=0 \;\to\; x=\pm 2$$

Solo tomamos el valor $x=2$, ya que $x=-2$ no pertenece al dominio de la función.

Estudiamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos.

$[1,2) \;\to\; f'(1)<0 \;\to\; f(x)$ estrictamente decreciente

$(2,+\infty) \;\to\; f'(10)>0 \;\to\; f(x)$ estrictamente creciente

b) En $x=2$ tenemos un extremo relativo ya que la derivada en ese punto es nula y a la izquierda la función decrece, y a la derecha la función crece. Además, por ser el único extremo relativo del dominio también será extremo absoluto.

$f(2)=4-8\ln(2)\simeq -1{,}55$ → Mínimo absoluto en $(2,\ -1{,}55)$

¡Ojo! Viene un detalle bastante sutil. En $x=1$ la función está definida. Además la función no está definida a la izquierda de $x=1$ y es estrictamente decreciente a su derecha. En $x=1$ no se anula la derivada, por lo que no es un extremo suave (extremo relativo). Pero si podemos decir que en $x=1$ encontramos un máximo local no suave por existir un entorno alrededor de $x=1$ donde la mayor imagen se alcanza en $x=1$. Como indico, este extremo local no debemos confundirlo con el concepto de extremo relativo suave.

$f(1)=1-8\ln(1)=1$ → Máximo local (no suave) en $(1,1)$

c) La curvatura la estudiamos con la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{4x\cdot x-(2x^2-8)}{x^2}=\frac{2x^2+8}{x^2} \quad , \quad f''(x)=0 \;\to\; 2x^2+8=0 \;\to\; x=\sqrt{-4}\notin\mathbb{R}$$

No tenemos puntos candidatos a puntos de inflexión, al no anularse la segunda derivada para ningún valor real.

La curvatura la estudiamos, de manera única, en todo el dominio.

$x\geq 1 \;\to\; f''(1)>0 \;\to\; f(x)$ convexa U

d) Las asíntotas oblicuas $y=mx+n$ pueden aparecer en el comportamiento de la función cuando la variable tiende a infinito y si converge el siguiente límite:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-8\ln(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(x-\frac{8\ln(x)}{x}\right)=\infty-0=\infty$$

Donde hemos usado que, en el infinito, el cociente ente logaritmo y polinomio tiende a cero.

Por lo tanto, al no converger a un valor finito el anterior límite, no existe asíntota oblicua.

No tiene sentido preguntarse por la AO en menos infinito porque la función solo está definida para $f:1\to+\infty$.

8. Sea la función $f(x)=\begin{cases} a-x & si \quad x\leq 1 \\ \frac{b}{x}+\ln(x) & si \quad x>1 \end{cases}$ **continua y derivable en** $x=1$ **.**

a) Obtener a **y** b **.**

b) Para $a=3$ **y** $b=2$ **calcula los extremos absolutos en el intervalo** $[1,e]$ **.**

a) Si la función es continua en $x=1$ debe cumplir:

$$\exists f(1)=a-1$$

$$\lim_{x\to 1^-}(a-x)=a-1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{b}{x}+\ln(x)\right)=b$$

Igualdad de límites laterales → $a-1=b$

La función definida en $x=1$ coincide con el límite en $x=1$ → $a-1=a-1$

Ya tenemos una primera condición que deben cumplir ambos parámetros.

Ahora estudiamos la derivabilidad. Si la función es derivable en $x=1$ las derivadas laterales en ese punto deben coincidir.

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<1 \\ \frac{-b}{x^2}+\frac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases} \rightarrow f'(1^-)=f'(1^+) \rightarrow -1=b+1 \rightarrow b=2$$

Ya tenemos el valor $b=2$ → Si $a-1=b$ → $a=3$

b) Para $a=3$ y $b=2$ debo estudiar los extremos absolutos en el intervalo cerrado $[1,e]$. Por lo tanto debo conocer el valor de la función en los extremos: $f(1)$ y $f(e)$, y además determinar si en el intervalo existe algún extremo relativo que pueda ser absoluto.

Los candidatos a extremos relativos se obtienen derivando la función e igualando a 0 . Es decir:

$$f'(x)=\begin{cases} -1 & si \quad x<1 \\ \frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases} \quad , \quad f'(x)=0 \text{ con } x\in[1,e]$$

Como calculamos anteriormente → $f'(1)=-1$, $f'(x)=0$ → $-1=0$ → Absurdo

En el segundo tramo de la función → $\frac{-2}{x^2}+\frac{1}{x}=0$ → $x=2$

Demostramos si $x=2$ es extremo relativo, con la segunda derivada.

$f''(x)=\frac{4}{x^3}-\frac{1}{x^2}$ → $f''(2)=\frac{4}{8}-\frac{1}{4}>0$ → En $x=2$ hay un mínimo relativo.

Por lo tanto debemos estudiar el valor de la función en los dos extremos del intervalo cerrado $[1, e]$ y en el mínimo relativo $x=2$.

$$x=1 \quad \rightarrow \quad f(1)=2$$

$$x=2 \quad \rightarrow \quad f(2)=\frac{2}{2}+\ln(2)\simeq 1{,}69$$

$$x=e \quad \rightarrow \quad f(e)=\frac{2}{e}+\ln(e)\simeq 1{,}74$$

Por lo tanto, en el intervalo $[1, e]$ tenemos un máximo absoluto en el punto $(1{,}2)$ y un mínimo absoluto en $(2,\ 1{,}69)$.

9. Sea la función definida por $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ **para** $x\neq 1$ **.**

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de la función.

b) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Los candidatos a asíntotas verticales son valores que anulan al denominador. Es decir, $x=1$.

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\infty$ → Hacemos límites laterales → $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Por lo tanto $x=1$ es una asíntota vertical. Por definición, la asíntota horizontal existe si el siguiente límite es finito:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\infty$ → Ya que el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador → Por lo tanto no existe asíntota horizontal, por lo que podemos tener oblicua del tipo $y=mx+n$, que calculamos de la forma:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{1}{1}=1$ → Como el grado de los polinomios del numerador y del denominador coincide, el límite converge al cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia.

$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1}=1$ → Donde nuevamente los grados de los polinomios en el numerador y en el denominador coinciden. La asíntota oblicua resulta → $y=x+1$

b) La monotonía la estudiamos con la primera derivada.

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero, por lo que:

$f'(x)=0$ → $x^2-2x=0$ → $x=0$, $x=2$ → Puntos críticos

Evaluamos la primera derivada en los intervalos formados en la recta real al considerar los puntos críticos y los puntos donde la función no está definida: $x=0$, $x=1$, $x=2$.

$(-\infty,0)$ → $f'(-100)>0$ → $f(x)$ estrictamente creciente

$(0,1)$ → $f'(\frac{1}{2})<0$ → $f(x)$ estrictamente decreciente

$(1,2)$ → $f'(\frac{3}{2})<0$ → $f(x)$ estrictamente decreciente

$(2,\infty)$ → $f'(100)>0$ → $f(x)$ estrictamente creciente

En consecuencia $x=0$ es un máximo relativo de imagen $f(0)=0$ → $(0,0)$.

Y $x=2$ es un mínimo relativo de imagen $f(2)=4$ → $(2,4)$.

10. Sea la función $f(x)=x^2-|x|$. Estudiar su derivabilidad, monotonía y extremos relativos.

Rompemos a trozos, antes de nada, el valor absoluto.

$$x=0$$

El argumento del valor absoluto es negativo a la izquierda de cero y positivo a la derecha de cero.

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x^2+x & si & x\le 0 \\ x^2-x & si & x>0 \end{matrix}\right\}$$

Para que la función sera derivable, primer debe ser continua. En los intervalos abiertos $x<0$, $x>0$ la función es continua por ser polinómica.

En el punto frontera $x=0$ aplicamos las condiciones de continuidad.

$$f(0)=0$$

$$L^-=\lim_{x\to 0^-}(x^2+x)=0 \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 0^+}(x^2-x)=0 \quad \to \quad L^-=L^+=0 \quad \to \quad L=0$$

$f(0)=L \quad \to \quad 0=0 \quad \to \quad f(x)$ es continua en $x=0$

Estudiamos la función derivada en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\left\{\begin{matrix} 2x+1 & si & x<0 \\ 2x-1 & si & x>0 \end{matrix}\right\}$$

En los intervalos abiertos $x<0$, $x>0$ la función derivada es continua por ser polinómica. Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en los intervalos abiertos.

Estudiamos la derivabilidad en el punto frontera, calculando si coinciden las derivadas laterales.

$$x=0$$

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1 \quad , \quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(2x-1)=-1 \quad \to \quad 1\neq -1$$

$f(x)$ no es derivable en $x=0$

Anulamos la primera derivada en cada intervalo para determinar la existencia de puntos críticos.

$si \quad x<0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 2x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1}{2}$ → pertenece al intervalo $x<0$

$si \quad x>0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 2x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$ → pertenece al intervalo $x>0$

Ambos puntos críticos pertenecen a los intervalos donde están definidos cada tramo. De no haber sido así, no los consideraríamos. Determinamos los extremos con el valor de la segunda derivada en el punto crítico.

$si \quad x<0 \quad \rightarrow \quad f''(x)=2>0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1}{2}$ es un mínimo relativo

$si \quad x>0 \quad \rightarrow \quad f''(x)=2>0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$ es un mínimo relativo

El estudio de la monotonía resulta:

$si \quad x<\frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x)$ es estrictamente decreciente

$\frac{-1}{2}<x<0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es estrictamente creciente

$0<x<\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x)$ es estrictamente decreciente

$\frac{1}{2}<x \quad \rightarrow \quad f(x)$ es estrictamente creciente

¡Ojo, una trampa final! Los mínimos que hemos obtenido son lo que anulan la primera derivada. Pero al trabajar con intervalos debemos tener en cuenta a todos los puntos frontera de los intervalos.

En $x=0$ la función es continua pero no derivable, por lo tanto nunca podrá ocurrir que $f'(0)=0$. Pero sí ocurre que si la función a la izquierda $x=0$ es creciente, y a la derecha de $x=0$ es decreciente, tenemos un máximo relativo no derivable (es un punto anguloso, al no ser suave el trazo de la función en ese punto).

11. Estudiar monotonía de:

a) $f(x)=(2x-1)e^{2x}$

b) $f(x)=x^2|x-3|$

c) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

a) La monotonía (crecimiento y decrecimiento de un función), se estudia a partir de los puntos críticos, y evaluando el signo de la derivada en los diferentes intervalos en que se descompone el dominio. Derivada positiva implica función estrictamente creciente. Derivada negativa implica función estrictamente decreciente.

El dominio de $f(x)=(2x-1)e^{2x}$ es toda la recta real,por ser producto de polinomio y exponencial.

$$f'(x)=2e^{2x}+(2x-1)e^{2x}2=e^{2x}(2+4x-2)=e^{2x}4x\rightarrow e^{2x}4x=0$$

La función exponencial nunca se anula, por lo tanto → $x=0$ → punto crítico

Evaluamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$(-\infty,0)\rightarrow x=-10\rightarrow f'(-10)<0$ → función estrictamente decreciente

$(0,\infty)\rightarrow x=10\rightarrow f'(10)>0$ → función estrictamente creciente

En $x=0$ tenemos un mínimo relativo.

b) El dominio de $f(x)=x^2|x-3|$ es toda la recta real, por ser un polinomio.

Rompemos el valor absoluto.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2(-(x-3)) \ si \ x\leq 3 \\ x^2(x-3) \ si \ x>3 \end{Bmatrix} \rightarrow f(x)=\begin{Bmatrix} -x^3+3x^2 \ si \ x\leq 3 \\ x^3-3x^2 \ si \ x>3 \end{Bmatrix}$$

Derivamos la función en cada intervalo y obtenemos sus correspondientes puntos críticos.

$$f'(x)=\begin{Bmatrix} -3x^2+6x \ si \ x<3 \\ 3x^2-6x \ si \ x>3 \end{Bmatrix} \rightarrow f'(x)=0$$

$-3x^2+6x=0 \rightarrow x=0, x=2$ → puntos críticos que sí pertenecen al intervalo $x<3$

$3x^2-6x=0 \rightarrow x=0, x=2$ → no pertenecen al intervalo $x>3$

Estudiamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$(-\infty,0)\rightarrow x=-10\rightarrow f'(-10)<0$ → función estrictamente decreciente

$(0,2)\rightarrow x=1\rightarrow f'(1)>0$ → función estrictamente creciente

$(2,3)\rightarrow x=\frac{5}{2}\rightarrow f'(\frac{5}{2})<0$ → función estrictamente decreciente

$(3,\infty)\rightarrow x=10\rightarrow f'(10)>0$ → función estrictamente creciente

Además, en $x=0$ poseemos un mínimo relativo. En $x=2$ un máximo relativo.

En $x=3$ no hay extremos relativo, aunque haya cambio de crecimiento a ambos lados. Ocurre que en $x=3$ no se anula la derivada y, además, si evaluamos la derivada a la izquierda de y a la derecha de ese punto, las derivadas laterales no coinciden. Por lo que la función no es derivable en $x=3$

c) Estudiamos monotonía de $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$. El dominio implica que el discriminante sea no negativo. Por lo tanto: $4-x^2\geq 0$ → obtenemos raíces del polinomio: $x=\pm 2$.

Evaluamos el signo de la inecuación en los siguientes intervalos:

$(-\infty,-2)\rightarrow x=-10\rightarrow 4-(-10)^2<0$ → no pertenece al dominio

$(-2,2)\rightarrow x=0\rightarrow 4-(0)^2>0$ → sí pertenece al dominio

$(2,\infty)\rightarrow x=10\rightarrow 4-(10)^2<0$ → no pertenece al dominios

Incluyendo a las raíces antes obtenidas, el dominio de la función es $Dom(f)=[-2,2]$

Derivamos e igualamos a cero para obtener puntos críticos.

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4x^2-x^4} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \quad\rightarrow\quad f'(x)=0$$

$4-2x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}$ → puntos críticos

Evaluamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$(-2,-\sqrt{2})\rightarrow x=-1{,}5\rightarrow f'(-1{,}5)<0$ → función estrictamente decreciente

$(-\sqrt{2},\sqrt{2})\rightarrow x=-1\rightarrow f'(-1)>0$ → función estrictamente creciente

$(\sqrt{2},2)\rightarrow x=1{,}5\rightarrow f'(1{,}5)<0$ → función estrictamente decreciente

En $x=-\sqrt{2}$ tenemos un mínimo relativo, $x=\sqrt{2}$ un máximo relativo.

12. Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.

a) Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

b) Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de la función.

a) La condición necesaria de punto crítico es primera derivada nula.

$f'(x)=1\cdot e^x+(x-a)e^x=e^x(1+x-a)$

Si en $x=0$ hay punto crítico --> $f'(0)=0 \rightarrow e^0(1+0-a)=0$ --> $a=1$

b) La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero.

Si $a=1 \rightarrow f'(x)=e^x(x) \rightarrow f''(x)=e^x(x)+e^x\cdot 1=e^x(x+1)$

$f''(x)=0 \rightarrow e^x(x+1)=0 \rightarrow e^x=0$ o bien $x+1=0$

La exponencial nunca se anula, por lo que el único candidato a punto de inflexión es $x=-1$

Aplicamos condición suficiente de punto de inflexión, evaluando el candidato en la tercera derivada.

$f''(x)=e^x(x+1) \rightarrow f'''(x)=e^x(x+1)+e^x\cdot 1=e^x(x+1+1)=e^x(x+2)$

$f'''(-1)=e^{-1}(-1+2)>0 \rightarrow x=-1$ es punto de inflexión, donde la función pasa de cóncava (∩) a cónvexa (U).

13. Sabiendo que $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & si \quad x\leq 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$ **es derivable en** $x=0$ **, calcula** b **y** c **.**

Si la función es derivable en $x=0$ implica que también es continua. Y por continuidad en punto frontera:

$$\exists f(0)=c$$

$$\lim_{x\to 0^-}(x^2+bx+c)=c$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x+1)}{x}=\frac{0}{0}$$ → Indeterminación → L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x+1}}{1}=\frac{1}{1}=1$$

Para que coincidan los límites laterales → $c=1$ → Existe límite y vale $L=1$

Y, además, esta condición satisface $f(0)=c=1=L$.

Una vez comprobada la continuidad, estudiamos la derivabilidad en los intervalos abiertos donde está definida la función.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+b & si \quad x<0 \\ \dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

Para que la función sera derivable en $x=0$ necesitamos que coincidan las derivadas evaluadas a la izquierda y a la derecha de $x=0$.

$$f'(0^-)=b$$

$$f'(0^+)=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{-x}{(x+1)^2}}{2x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-1}{2(x+1)^2}=\frac{-1}{2}$$

Por igualdad de los límites laterales → $b=\dfrac{-1}{2}$

14. Sea la función $f:[-2,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} 5x+1 & si \quad -2\leq x\leq 0 \\ e^x\cdot\cos(x) & si \quad 0<x\leq 2\pi \end{cases}$. Hallar los extremos relativos y absolutos.

La condición necesaria de extremo relativo implica anular la primera derivada.

$$f'(x)=\begin{cases} 5 & si \quad -2<x<0 \\ e^x\cdot\cos(x)+e^x(-sen(x)) & si \quad 0<x<2\pi \end{cases}$$

Donde hemos quitado el signo igual de los puntos frontera porque no sabemos (el enunciado no lo dice) que la función sea derivable en los puntos frontera (habría que demostralo calculando las derivadas laterales).

$$f'(x)=\begin{cases} 5 & si \quad -2<x<0 \\ e^x\cdot\cos(x)-e^x\cdot sen(x) & si \quad 0<x<2\pi \end{cases}$$

Al igualar la primera derivada a 0:

$5=0$ → absurdo matemático → no hay solución

$e^x\cdot\cos(x)-e^x\cdot sen(x)=0$ → factor común → $e^x\cdot[\cos(x)-sen(x)]=0$

La exponencial nunca su anula, por lo que obtenemos:

$\cos(x)-sen(x)=0 \quad\rightarrow\quad \cos(x)=sen(x)$

Si dibujamos la gráfica del coseno y la gráfica del seno, es fácil intuir los puntos de corte en el intervalo $(0,2\pi)$. Esos puntos de corte ocurren para 45 º ($\pi/4$) y para 225º ($5\pi/4$).

Otra opción es dividir en ambos lados de la ecuación por cos(x). Esta división es válida si cos(x) no es igual a 0, lo cual ocurre para $+\pi/2,+3\pi/2$ dentro del intervalo $(0,2\pi)$. Y en estos valores no se cumple la igualdad porque, por ejemplo, el coseno de 90º vale 0, mientras que el seno de 90º vale 1.

Por lo tanto, nos queda la ecuación:

$$\cos(x)=sen(x) \quad\rightarrow\quad \frac{\cos(x)}{\cos(x)}=\frac{sen(x)}{\cos(x)} \quad\rightarrow\quad 1=tg(x)$$

Repetimos: podemos dividir por cos(x) si el coseno no se hace 0. Y el coseno se hace 0 para unos valores donde la ecuación no se cumple. Por ejemplo: $\cos(\pi/2)=0$ no es igual a $sen(\pi/2)=1$.

¿Qué ángulo tiene tangente igual a 1? Usando la calculadora:

$x=\frac{\pi}{4}$ (45º)

$x=\frac{5\pi}{4}$ (225º)

Estudiamos el signo de la derivada en los intervalos que forman, sobre la recta real, el punto de inicio del dominio, el punto de fin del dominio y los puntos críticos. Recordamos que estamos estudiando los puntos críticos de la función en el intervalo $(0,2\pi)$.

$f'(x)=e^x \cdot \cos(x)-e^x \cdot sen(x)$

$(0,\frac{\pi}{4})$	$(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4})$	$(\frac{5\pi}{4},2\pi)$
$f'(\frac{\pi}{6})>0$	$f'(\pi)<0$	$f'(\frac{3\pi}{2})>0$
Función $f(x)$ estrictamente creciente	Función $f(x)$ estrictamente decreciente	Función $f(x)$ estrictamente creciente

Por lo tanto:

En $x=\frac{\pi}{4}$ tenemos un máximo relativo.

En $x=\frac{5\pi}{4}$ tenemos un mínimo relativo.

Para responder a los extremos absolutos, comprobamos la imagen de la función en el punto de inicio del dominio, en el punto de fin del dominio y en los extremos relativos. Recordamos que ahora estamos estudiando los extremos absolutos en todo el dominio de definición: $f:[-2,2\pi]\rightarrow\mathbb{R}$.

$x=-2$	$x=0$	$x=\frac{\pi}{4}$	$x=\frac{5\pi}{4}$	$x=2\pi$
$f(-2)=-9$ Donde hemos sustituido en la recta	$f(0)=1$ Donde podemos sustituir tanto en la recta como en el producto de la exponencial por el coseno, porque la función es continua en ese punto frontera.	$f(\frac{\pi}{4})=1.55$	$f(\frac{\pi}{4})=-35.89$	$f(2\pi)=535{,}49$

Conclusión: Obtenemos un máximo relatuvo en el punto $(\frac{\pi}{4},1.55)$. Obtenemos un mínimo relativo y absoluto en $(\frac{5\pi}{4},-35.89)$. Contamos con un mñaximo absoluto en el punto $(2\pi,535.49)$.