「拉格郎日插值多項式」學習單

原理使用：

設α，β，γ為相異三實數，且 f(α)=f(β)=f(γ)=0

$$\Rightarrow\begin{cases}(x-\alpha)\mid f(x)\\(x-\beta)\mid f(x)\\(x-\gamma)\mid f(x)\end{cases}\Rightarrow(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\mid f(x)\Rightarrow f(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)g(x)$$

例：degf(x)=3 且 f(2)=3，f(-3)=1，f(1)=4，f(-1)=2，則 f(x)=________________。

解：考慮四個 3 次函數 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$分別滿足

$$\begin{cases}f_1(2)=3 & f_1(-3)=0 & f_1(1)=0 & f_1(-1)=0\\f_2(2)=0 & f_2(-3)=1 & f_2(1)=0 & f_2(-1)=0\\f_3(2)=0 & f_3(-3)=0 & f_3(1)=4 & f_3(-1)=0\\f_4(2)=0 & f_4(-3)=0 & f_4(1)=0 & f_4(-1)=2\end{cases}$$

設 $\begin{cases}f_1(x)=k_1(x+3)(x-1)(x+1)\\f_2(x)=k_2(x-2)(x-1)(x+1)\\f_3(x)=k_3(x-2)(x+3)(x+1)\\f_4(x)=k_4(x-2)(x+3)(x-1)\end{cases}$ 且 $\begin{cases}f_1(2)=3\\f_2(-3)=1\\f_3(1)=4\\f_4(-1)=2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=\_\_\_\_\_\_\\k_2=\_\_\_\_\_\_\\k_3=\_\_\_\_\_\_\\k_4=\_\_\_\_\_\_\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\f_2(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\f_3(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\f_4(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}$

令 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)$，因為 $\begin{cases}f(2)=f_1(2)+f_2(2)+f_3(2)+f_4(2)=\_\_\_\_\_\_\_\_\\f(-3)=f_1(-3)+f_2(-3)+f_3(-3)+f_4(-3)=\_\_\_\_\_\_\_\_\\f(1)=f_1(1)+f_2(1)+f_3(1)+f_4(1)=\_\_\_\_\_\_\_\_\\f(-1)=f_1(-1)+f_2(-1)+f_3(-1)+f_4(-1)=\_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}$

所以此 f(x)即為所要求的多項式

例：degf(x)=3，且函數 y=f(x)的圖形通過點 A(-5,6),B(-2,2),C(1,4),D(4,-3)，則 f(x)=________________。

解：因為 y=f(x)的圖形通過點 A(-5,6),B(-2,2),C(1,4),D(4,-3)⇒ 函數 f(x)必須滿足 $\begin{cases}f(-5)=\_\_\_\_\_\_\\f(-2)=\_\_\_\_\_\_\\f(1)=\_\_\_\_\_\_\\f(4)=\_\_\_\_\_\_\end{cases}$

考慮四個 3 次函數 $f_1(x),f_2(x),f_3(x),f_4(x)$分別滿足

$$\begin{cases}f_1(-5)=\_\_\_ & f_1(-2)=0 & f_1(1)=0 & f_1(4)=0\\f_2(-5)=0 & f_2(-2)=\_\_\_ & f_2(1)=0 & f_2(4)=0\\f_3(-5)=0 & f_3(-2)=0 & f_3(1)=\_\_\_ & f_3(4)=0\\f_4(-5)=0 & f_4(-2)=0 & f_4(1)=0 & f_4(4)=\_\_\_\end{cases}$$

設 $\begin{cases}f_1(x)=k_1(x+2)(x-1)(x-4)\\f_2(x)=k_2(x+5)(x-1)(x-4)\\f_3(x)=k_3(x+5)(x+2)(x-4)\\f_4(x)=k_4(x+5)(x+2)(x-1)\end{cases}$ 且 $\begin{cases}f_1(-5)=\_\_\_\\f_2(-2)=\_\_\_\\f_3(1)=\_\_\_\\f_4(4)=\_\_\_\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k_1=\_\_\_\_\_\\k_2=\_\_\_\_\_\\k_3=\_\_\_\_\_\\k_4=\_\_\_\_\_\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}f_1(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\f_2(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\f_3(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\\f_4(x)=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}$

令 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+f_3(x)+f_4(x)$，因為 $\begin{cases}f(-5)=f_1(-5)+f_2(-5)+f_3(-5)+f_4(-5)=\_\_\_\_\_\_\_\_\\f(-2)=f_1(-2)+f_2(-2)+f_3(-2)+f_4(-2)=\_\_\_\_\_\_\_\_\\f(1)=f_1(1)+f_2(1)+f_3(1)+f_4(1)=\_\_\_\_\_\_\_\_\\f(4)=f_1(4)+f_2(4)+f_3(4)+f_4(4)=\_\_\_\_\_\_\_\_\end{cases}$

所以此 f(x)即為所要求的多項式