Planarbeit

Zyklische Matrizen

Erarbeiten Sie sich schrittweise die folgenden Themen. Notieren Sie gegebenenfalls zu jedem Thema Fragen. Lösen Sie jeweils die zugehörige Kontrollaufgabe. Kontrollieren Sie Ihre Lösung mit der Musterlösung. Lösen Sie die ergänzenden Aufgaben.

Thema	Fragen	Kontrollaufgabe richtig	Kontrollaufgabe falsch
(1) Populationsentwicklung am Beispiel der Maikäfer			
(2) Beschreibung der Populationsentwicklung mit Matrizen			
(3) Käuferverhalten und stochastische Matrizen			
(4) Berechnung des Stabilitätsvektors			
Aufgaben	**Fragen**	**richtig**	**falsch**
Aufgabe 1			
Aufgabe 2			
Aufgabe 3			

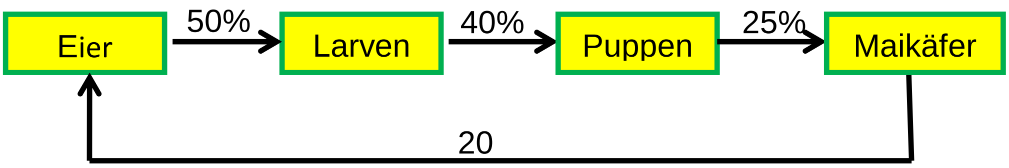
Populationsentwicklung

Unter einer Population versteht man in der Ökologie eine Gruppe von Individuen derselben Art, die ein Gebiet besiedeln. Der Bestand einer Population kann durch Fortpflanzung wachsen, aber auch durch negative Umwelteinflüsse oder durch die Anwesenheit von Räubern im selben Gebiet abnehmen. Bei einigen Tierarten kann man zyklische Veränderungen des Bestandes beobachten, d.h. in bestimmten Zeitabständen nimmt der Bestand ab bzw. zu. Die zyklischen Veränderungen können mit Hilfe von zyklischen Matrizen modelliert werden.

(1) Beispiel: Maikäferpopulation

„In unseren klimatischen Verhältnissen benötigt der Maikäfer **4 Jahre** (3-5 Jahre) zu seiner Entwicklung. Seine Larve ist der Engerling. […] Zur Eiablage arbeitet sich das Weibchen etwa 25 cm tief in den Boden, wo es **12 bis 30** hellgelbe **Eier** von der Größe eines Hirsekorns legt. Nach etwa 6 Wochen schlüpft die **Larve (Engerling).** Während im ersten Jahr der Fraßschaden der Engerlinge noch nicht sehr stark in Erscheinung tritt, können im zweiten, dritten oder vierten Entwicklungsjahr ganze Kulturen ihrem Fraße zum Opfer fallen. Im letzten Sommer der Entwicklung erfolgt vom Juni bis Juli die **Verpuppung** für eine Dauer von 4 bis 8 Wochen. Der von August bis September schlüpfende **Käfer** verbleibt im Boden und überwintert hier als fertiges Insekt. Er verlässt den Boden erst im Mai und ernährt sich nun von den Blättern der Laubgehölze. Sein Fraß kann in Obstkulturen und Forstbeständen zur völligen Entlaubung der Bäume führen.“[1]

Wir stellen die Entwicklungsstadien der Maikäferpopulation in einem Diagramm dar. Ein Maikäferweibchen legt 20 Eier ab.



Dem Diagramm liegen folgende Annahmen zu Grunde: Von den Eiern überleben 50% und es schlüpfen Larven. Von den Larven überleben wiederum 40% und entwickeln sich zu Puppen. 25% der Puppen entwickeln sich zu Maikäfern, diese überwintern im Boden und verlassen den Boden im Mai des kommenden Jahres. Die Entwicklung der Maikäfer kann als Tabelle dargestellt werden:

	Eier	Larven	Puppen	Maikäfer
Eier	0	0	0	20
Larven	0,5	0	0	0
Puppen	0	0,4	0	0
Maikäfer	0	0	0,25	0

Die Tabelle liest man wie folgt:
- Die Wahrscheinlichkeit, dass aus einem Ei eine Larve schlüpft ist 0,5.
- Eine Larve entwickelt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 0,4 zu einer Puppe.
- Eine Puppe entwickelt sich mit einer Wahrscheinlichkeit von 25 % zum Maikäfer.
- In der letzten Spalte steht schließlich die Anzahl der von einem Maikäferweibchen abgelegten Eier.

[1] http://www.bosit.ch/index.php?id=72, Zugriff: 15.04.2014

Zu einem bestimmten Zeitpunkt befinden sich beispielsweise Individuen aller vier Stadien im Boden einer Wiese. Nehmen wir an, es sind 8000 Eier, 4000 Larven, 2000 Puppen und 800 Maikäferweibchen. Wie ist die Verteilung ein Jahr später, wenn ein Maikäferweibchen 20 Eier ablegt?

Neue Eier: $e_1 = 800 \cdot 20 = 16000;$ Neue Larven: $l_1 = 8000 \cdot 0{,}5 = 4000;$
Neue Puppen: $p_1 = 4000 \cdot 0{,}4 = 1600;$ Neue Maikäfer: $m_1 = 2000 \cdot 0{,}25 = 500.$

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 1.

(2) Beschreibung der Populationsentwicklung mit Matrizen

Zur Beschreibung der Entwicklung der Maikäferpopulation und der Anzahl der Individuen in den einzelnen Stadien eignen sich Matrizen. Die obige Tabelle beschreibt den Übergang von einem Jahr zum nächsten, die zugehörige Matrix bezeichnen wir als Übergangsmatrix.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Anzahlen der Individuen der vier Stadien zu einem bestimmten Zeitpunkt (Startpopulation) fassen wir zu einem Vektor zusammen, dem Verteilungsvektor.

$$\vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \\ 2000 \\ 800 \end{pmatrix}$$

Der Verteilungsvektor $\vec{p}_1$ des folgenden Jahres wird als Multiplikation der Übergangsmatrix mit dem Verteilungsvektor $\vec{p}_0$ berechnet.

$$\vec{p}_1 = M \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 20 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8000 \\ 4000 \\ 2000 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16000 \\ 4000 \\ 1600 \\ 500 \end{pmatrix}$$

Die Verteilungen weiterer Jahre werden genauso berechnet: $\vec{p}_2 = M\vec{p}_1$, $\vec{p}_3 = M\vec{p}_2$ usw., die weitere Gültigkeit der Übergangsmatrix M vorausgesetzt.

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 2.

(3) Matrixpotenzen und Zyklische Matrix

In der Kontrollaufgabe 2 haben Sie gezeigt, dass $\vec{p}_4 = \vec{p}_0$ gilt. D.h. nach einem Zyklus von vier Jahren stellt sich die Anfangsverteilung wieder ein. Wir formen den Vektor $\vec{p}_4$ um, es ist

$$\vec{p}_4 = M \cdot \vec{p}_3 = M \cdot (M \cdot \vec{p}_2) = M \cdot (M \cdot (M \cdot \vec{p}_1)) = M \cdot (M \cdot (M \cdot (M \cdot \vec{p}_0))) = M^4 \cdot \vec{p}_0$$

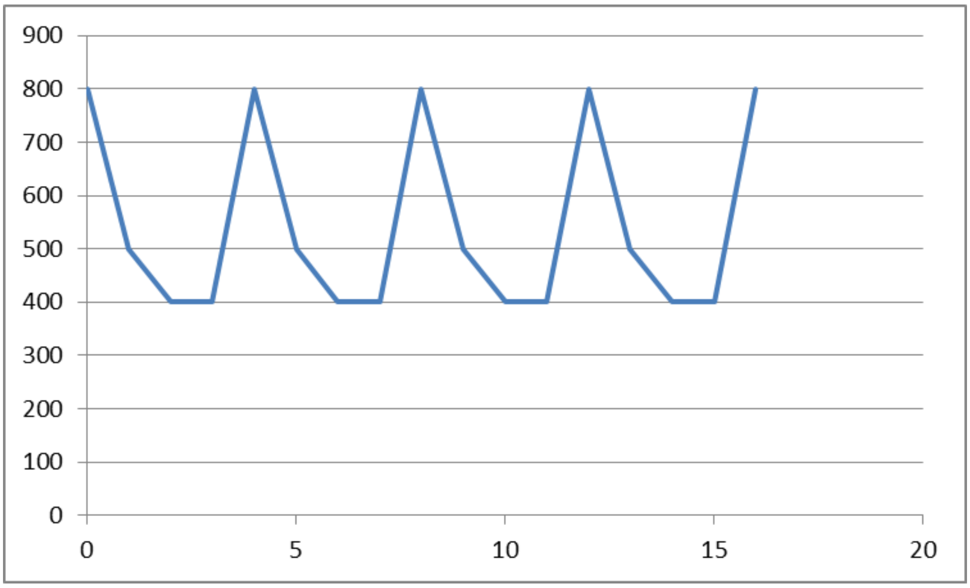
Also gilt:

$$M^4 \cdot \vec{p}_0 = \vec{p}_0 \Rightarrow M^4 = E$$

In Worten: Die vierte Potenz der Übergangsmatrix ist die Einheitsmatrix

Definition
Eine Matrix *A* heißt zyklisch, wenn es eine natürliche Zahl *k* gibt mit $A^k = E$.

Bemerkung
Ist die Übergangsmatrix eine zyklische Matrix, dann wiederholt sich der Verteilungsvektor zyklisch. Für das Maikäferbeispiel bedeutet dies, dass alle vier Jahre dieselbe Anzahl von Maikäfern den Boden verlässt. Die Anzahl der Maikäfer bleibt, bis auf die zyklischen Schwankungen, konstant.

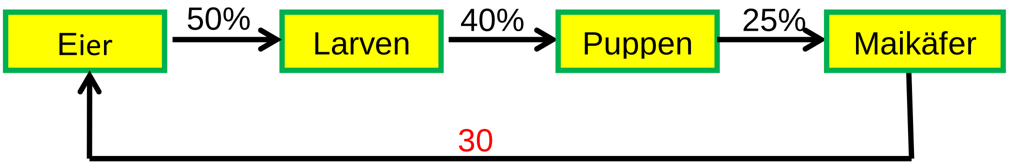


Senkrechte Achse: Anzahl der Maikäferweibchen, waagrechte Achse: Jahre

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 3

(4) Bedingungen für das Wachstum der Population

Bei günstigen Verhältnissen können Maikäferweibchen mehr Eier ablegen. Nehmen wir an, es sind 30 Eier, die anderen Parameter lassen wir gleich.



Die ursprüngliche Tabelle verändert sich nur an einer Stelle.

	Eier	Larven	Puppen	Maikäfer
Eier	0	0	0	30
Larven	0,5	0	0	0
Puppen	0	0,4	0	0
Maikäfer	0	0	0,25	0

Wir berechnen die vierte Potenz der Übergangsmatrix:

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 1{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1{,}5 \end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1{,}5 \cdot E$$

(Bitte nachrechnen. Tipp: $M^4 = M^2 \cdot M^2$.)

Damit gilt für den Verteilungsvektor $\vec{p}_4$:

$$\vec{p}_4 = M^4 \cdot \vec{p}_0 = 1{,}5 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = 1{,}5 \cdot \vec{p}_0$$

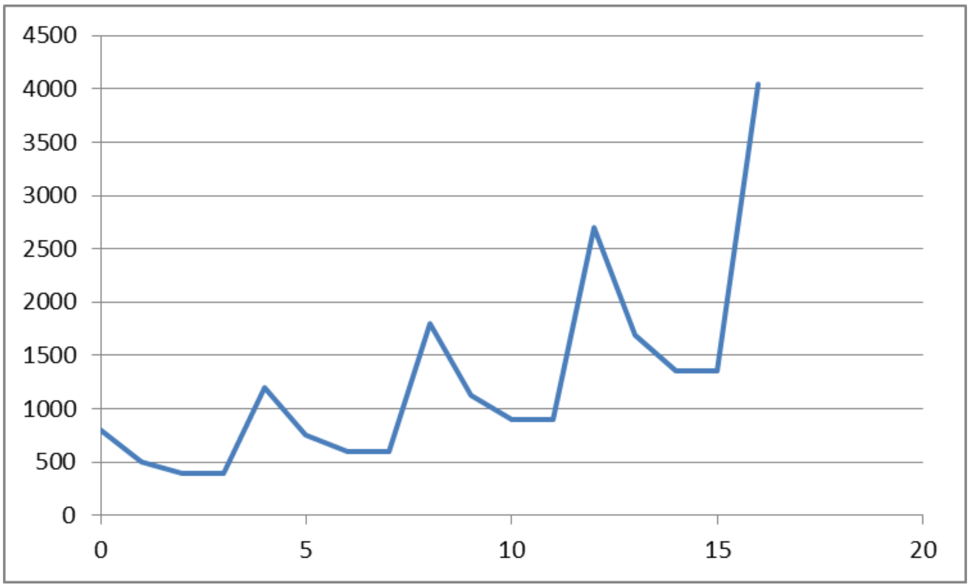
Bei einem Verteilungsvektor $(\vec{p}_0)^T = (8000|4000|2000|800)$ ergibt sich nach einem Zyklus

$$\vec{p}_4 = 1{,}5 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 12000 \\ 6000 \\ 3000 \\ 1200 \end{pmatrix}.$$

Für weitere Zyklen folgt:

$$\vec{p}_8 = 1{,}5^2 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 18000 \\ 9000 \\ 4500 \\ 1800 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p}_{12} = 1{,}5^3 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 27000 \\ 13500 \\ 6750 \\ 2700 \end{pmatrix}, \ldots, \text{ allgemein: } \vec{p}_{4n} = 1{,}5^n \cdot \vec{p}_0 .$$

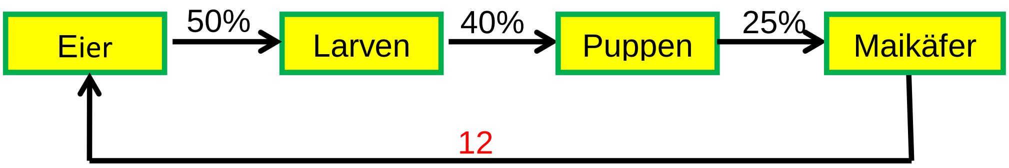
Die Maikäferpopulation wächst also zyklisch um den Faktor 1,5.



Senkrechte Achse: Anzahl der Maikäferweibchen, waagrechte Achse: Jahre

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 4.

Bei ungünstigen Verhältnissen legen Maikäferweibchen weniger Eier ab. Nehmen wir an, es sind 12 Eier, die anderen Parameter lassen wir gleich.



Die ursprüngliche Tabelle verändert sich nur an einer Stelle.

	Eier	Larven	Puppen	Maikäfer
Eier	0	0	0	12
Larven	0,5	0	0	0
Puppen	0	0,4	0	0
Maikäfer	0	0	0,25	0

Wir berechnen die vierte Potenz der Übergangsmatrix:

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0{,}5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}25 & 0 \end{pmatrix}^4 = \begin{pmatrix} 0{,}6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}6 \end{pmatrix} = 0{,}6 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0{,}6 \cdot E \quad \text{(nachrechnen!)}$$

Damit gilt für den Verteilungsvektor $\vec{p}_4$: $\vec{p}_4 = M^4 \cdot \vec{p}_0 = 0{,}6 \cdot E \cdot \vec{p}_0 = 0{,}6 \cdot \vec{p}_0$

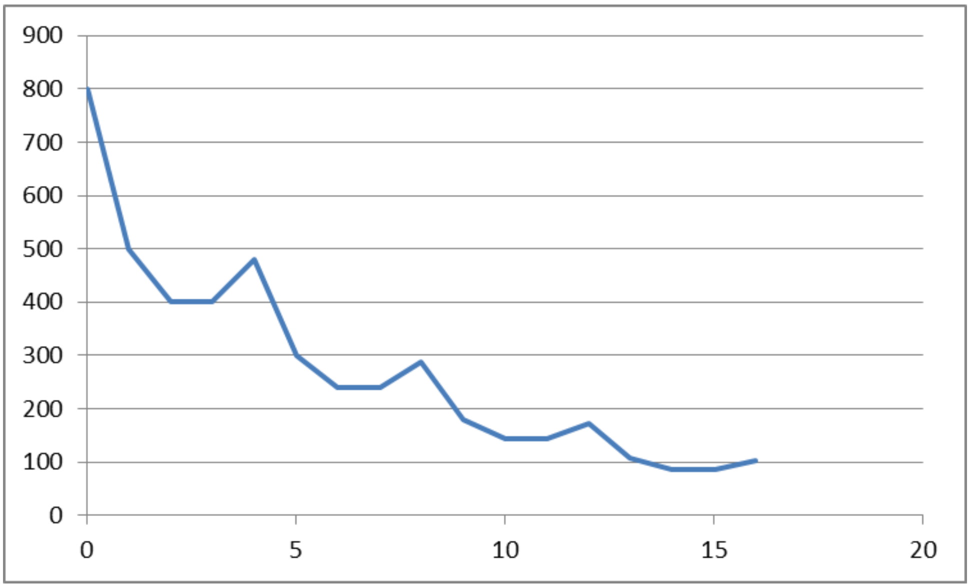
Bei einem Verteilungsvektor $(\vec{p}_0)^T = (8000|4000|2000|800)$ ergibt sich nach einem Zyklus

$$\vec{p}_4 = 0{,}6 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 4800 \\ 2400 \\ 1200 \\ 480 \end{pmatrix}.$$

Für weitere Zyklen folgt:

$$\vec{p}_8 = 0{,}6^2 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 2880 \\ 1440 \\ 720 \\ 288 \end{pmatrix}, \qquad \vec{p}_{12} = 0{,}6^3 \cdot \vec{p}_0 = \begin{pmatrix} 1728 \\ 864 \\ 432 \\ 172{,}8 \end{pmatrix}, \ldots, \text{ allgemein: } \vec{p}_{4n} = 0{,}6^n \cdot \vec{p}_0 .$$

Die Maikäferpopulation nimmt also zyklisch um den Faktor 0,6 ab.



Senkrechte Achse: Anzahl der Maikäferweibchen, waagrechte Achse: Jahre

Bearbeiten Sie die Kontrollaufgabe 5.

Verallgemeinerung

Wir betrachten eine allgemeine Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix}$$

und berechnen sukzessive die Matrixpotenzen.

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & cd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ad \\ ab & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bc & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & cd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & ad \\ ab & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bc & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & bcd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & acd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abd \\ abc & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & bcd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & acd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abd \\ abc & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} abcd & 0 & 0 & 0 \\ 0 & abcd & 0 & 0 \\ 0 & 0 & abcd & 0 \\ 0 & 0 & 0 & abcd \end{pmatrix} = abcd \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Es gilt also $A^4 = abcd \cdot E$ so wie $A^8 = (abcd)^2 \cdot E$, $A^{12} = (abcd)^3 \cdot E$, … , $A^{4n} = (abcd)^n \cdot E$

Merke

Verändert sich eine Population gemäß der Übergangsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \end{pmatrix},$$

dann gelten die folgenden Bedingungen:

- Für $abcd > 1$ wächst die Population zyklisch.
- Für $abcd = 1$ wiederholt sich der Populationsbestand zyklisch.
- Für $abcd < 1$ nimmt die Population zyklisch ab.