Probabilidad y regla de Laplace. Axiomas de Kolgomorov

CURSO	TEMA	WWW.DANIPARTAL.NET
1ºBach CCSS	PROBABILIDAD	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

FRECUENCIA ABSOLUTA, FRECUENCIA RELATIVA Y PROBABILIDAD A POSTERIORI

Si lanzo una vez una moneda (y no está trucada) es imposible saber si saldrá cara o cruz. Pero si repito el experimento muchas, muchas, muchas, muchas veces, el número de caras será muy parecido al número de cruces. Diremos que (en el caso ideal de tirar infinitas veces la moneda), la **frecuencia relativa** con que aparece cara coincide con la frecuencia relativa con que aparece cruz.

Es decir, si la **frecuencia absoluta** es 1.000.000 de lanzamientos, la frecuencia relativa de las caras tenderá al 50% (500.000 de frecuencia absoluta para cara) y la frecuencia relativa de las cruces tenderá también al 50% (500.000 de frecuencia absoluta para cruz).

Diremos, en términos de probabilidad, que la probabilidad de obtener cara es del 50% y la probabilidad de obtener cruz es del 50%. Si hablamos en **tanto por uno**, diremos que la probabilidad de obtener cara es 1/2 y la probabilidad de obtener cruz es 1/2.

Esto es un ejemplo de **probabilidad a posteriori** (después de repetir muchas veces el experimento). Y hace siglos, en los juegos de azar, se reflexionaba de esta manera: se repetía el juego muchas, muchas veces, y se observaba el valor al que tendía cada suceso posible del espacio muestral.

PROBABILIDAD A PRIORI Y REGLA DE LAPLACE

¿Podemos llegar a la misma conclusión del ejemplo anterior, sin necesidad de repetir tantas y tantas veces un experimento?

Sí, suponiendo que cada suceso elemental es equiprobable (igual de probable) porque la moneda no está trucada. Es lo que se conoce como **regla de Laplace**:

Si poseemos un espacio muestral E con n-sucesos elementales equiprobables, la probabilidad de que acontezca un suceso elemental es 1/n.

En el caso de la moneda, nuestro espacio muestral posee dos sucesos elementales:

$$E = \{\text{cara}, \text{cruz}\}$$

Por lo que la probabilidad de cada suceso elemental será 1/2, siendo n = 2 en la regla de Laplace.

Otro ejemplo. Considera el experimento de lanzar un dado de seis caras. Y considera el suceso "Obtener un número mayor o igual que 5". Este suceso tendrá dos sucesos elementales: $A = \{5,6\}$.

¿Cuál es la probabilidad de obtener uno de los sucesos elementales de A?

El suceso A posee 2 sucesos elementales, el espacio muestral cuenta con 6 sucesos y todos los sucesos son equiprobables (el dado no está trucado). La probabilidad de obtener alguno de los sucesos de A será 2/6 = 1/3.

Podemos **generalizar la regla de Laplace** con la siguiente expresión:

Sea E un espacio muestral de n-sucesos elementales.

Sea A un suceso con m-sucesos elementales, siendo $m \leq n$.

La probabilidad de A es igual al cociente entre el número de resultados favorables de A y el número de resultados posibles de E

$$P(A) = \frac{nº\ casos\ favorables}{nº\ casos\ posibles} = \frac{m}{n}$$

Esta forma de definir la probabilidad, matemáticamente hablando, es igual a realizar sobre la frecuencia relativa el razonamiento a posteriori de límite cuando el número de repeticiones del experimento tiende a infinito.

Es lo que se conoce como **ley de los grandes números: la probabilidad a posteriori (frecuencia relativa de A) y la probabilidad a priori (P(A)) coinciden en el caso límite de que el número de repeticiones tiende a infinito.**

AXIOMAS DE KOLGOMOROV

Sea E el espacio muestral de un experimento aleatorio. El concepto de probabilidad cumple las siguientes leyes (axiomas de Kolgomorov):

- La probabilidad total es 1 → P(E) = 1
- Cualquier suceso A cumple 0 ≤ P(A) ≤ 1
- Dos sucesos cualesquiera A y B cumplen: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  Restamos $P(A \cap B)$ para evitar contar dos veces los sucesos elementales pertenecientes a la intersección, ya que aparecen tanto en A como en B.
  Cuando dos sucesos pueden realizarse a la vez, se llaman compatibles.
  Por ejemplo: el suceso A "obtener un número par con un dado" es compatible con el suceso B "obtener el número 6 con el dado". Ambos sucesos tienen el elemento {6} en común si hacemos la intersección.
  Si dos sucesos son incompatibles (no tienen sucesos elementales en común), la probabilidad de su unión es igual a la suma de sus probabilidades. Es decir, si $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
  Por ejemplo: el suceso A "obtener un número par con un dado" es incompatible con el suceso B "obtener un número impar". La intersección de ambos sucesos es el conjunto vacío. Es decir, si $A \cap B = \emptyset \rightarrow P(A \cap B) = 0$.
- La probabilidad del conjunto vacío (suceso imposible) es cero → $P(\emptyset) = 0$.
- La probabilidad de un suceso A y de su complementario cumplen la siguiente relación: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$. O lo que es lo mismo: $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.
- Si A y B son dos sucesos, y A está incluido dentro de B, se cumple: $P(A) \leq P(B)$.
- Dados dos sucesos cualesquiera A y B se cumple: $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.
- Dados un conjunto de sucesos $A_1, A_2, A_3, ..., A_k$ incompatibles dos a dos, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades. Es decir, la probabilidad de la unión se expresa: $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + ... + P(A_k)$.