8 Modellieren der Cheopspyramide

Didaktische Hinweise

Die folgende Station stellt eine Idee zur Modellierung räumlicher Objekte mit Hilfe der mathematischen Werkzeuge aus der Vektorgeometrie vor. Bei diesem Beispiel durchlaufen die Schülerinnen und Schüler alle vier Stufen des Modellierungskreislaufs. Neben der Kompetenz mathematisch zu modellieren ist ein hohes Maß an sprachlicher Kompetenz notwendig, da sie die reale Situation aus einem umfangreichen Text erschließen und zunächst in ein reales Modell übertragen müssen.

Die Station bietet vielfältige Möglichkeiten der Differenzierung: Die Aufgabenstellung reicht vom einfachen Darstellen im selbstgewählten Koordinatensystem bis hin zum Berechnen komplexer Wegstrecken im Innern der Pyramide.

Ziele

Die Schülerinnen und Schüler …

… entwickeln anhand der Informationen ein mathematisches Modell der Cheops-Pyramide und stellen es in einem räumlichen Koordinatensystem dar.

… berechnen mit Hilfe dieses Modells die unbekannten geometrischen Größen der Pyramide, z.B. Längen, Flächeninhalte, Volumen und Winkel.

… machen quantitative Aussagen über die Veränderung der Form der Pyramide im Laufe der Jahrtausende.

… entwickeln Fragestellungen zum System der Tunnel und Schächte im Innern der Pyramide und beantworten diese mit den Werkzeugen der Vektorgeometrie.

…

Übersicht der Materialien

- Wikipedia-Informationsblatt über die Cheops-Pyramide
- Querschnitt durch die Cheops-Pyramide
- Schülerarbeitsblatt: Modellierungsschritte und Fragen
- Tipps zu den Aufgaben
- Lösungsvorschlag
- GeoGebra-Arbeitsblatt *Cheops.ggb*

Quellen

https://de.wikipedia.org/wiki/Cheops-Pyramide#Die_Pyramide

http://www.cheops-pyramide.ch/grosse-pyramide.html

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kheops-Pyramid.jpg

https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kheops-coupe.svg

Informationsblatt

Die Cheops-Pyramide ist die älteste und größte der drei Pyramiden von Gizeh und wird deshalb auch als „Große Pyramide“ bezeichnet. Die höchste Pyramide der Welt wurde als Grabmal für den ägyptischen König (Pharao) Cheops (altägyptisch Chufu) errichtet, der während der 4. Dynastie im Alten Reich regierte (etwa 2620 bis 2580 v. Chr.). Sie wird zu den Sieben Weltwundern der Antike gezählt. Als Bauplatz für sein Projekt wählte Cheops nicht mehr die königliche Nekropole von Dahschur wie sein Vorgänger Snofru, sondern das sogenannte Giza-Plateau.

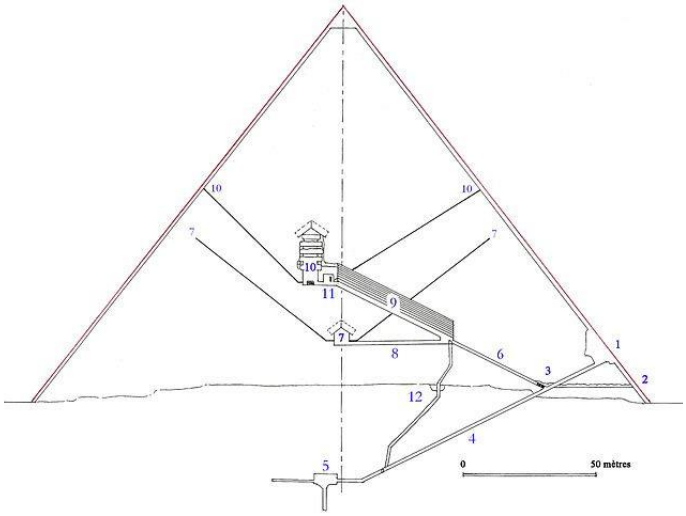
Altägyptisch wurde die Pyramidenanlage Achet Chufu („Horizont des Cheops“) genannt. Im klassischen Altertum hieß sie griechisch ἡ μεγάλη Πύραμις τοῦ Χέοπος (hê megálê Pýramis tou Chéopos, „Die Große Pyramide des Cheops“) oder αἱ Πυράμιδες Αἰγυπτίαι (hai Pyrámides Aigyptíai, „die ägyptischen Pyramiden“), lateinisch Pyramides Aegyptiae oder Magna Pyramis Cheopis.

Ihre ursprüngliche Seitenlänge wird auf 230,33 m und die Höhe auf 146,59 m (ca. 280 Ellen) geschätzt. Da sie in späterer Zeit als Steinbruch diente, beträgt ihre Seitenlänge heute nur noch und ca. 225 m und ihre Höhe 138,75 m. Ihre Einmessung wurde in sehr hoher Genauigkeit vorgenommen, die schon in den nachfolgenden Bauten nicht mehr erreicht wurde. Sie ist genau nach den vier Himmelsrichtungen ausgerichtet und der Unterschied in den Längen ihrer vier Seiten beträgt weniger als ein Promille. Als Baumaterial diente hauptsächlich örtlich vorkommender Kalkstein. Für einige Kammern wurde Granit verwendet. Die Verkleidung der Pyramide bestand ursprünglich aus weißem Tura-Kalkstein, der im Mittelalter fast vollständig abgetragen wurde.

Quelle: https://de.wikipedia.org/wiki/Cheops-Pyramide#Die_Pyramide

Querschnitt durch die Cheops-Pyramide

1 ursprünglicher Eingang
2 Al-Maʾmun-Tunnel (heutiger Zugang)
3 Verbindung zwischen ab- und aufsteigendem Korridor
4 absteigender Korridor
5 Felsenkammer
6 aufsteigender Korridor
7 Königinnenkammer mit „Luftschächten“
8 horizontaler Gang
9 Große Galerie
10 Königskammer mit „Luftschächten“
11 Korridor zur Sarkophagkammer und Blockiersteinkammer
12 Luft- oder Fluchtschacht mit „Grotte“



Quelle: https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kheops-coupe.svg#/media/File:Kheops-coupe.svg

Arbeitsblatt

Sie entwickeln ein mathematisches Modell der Cheops-Pyramide, das Sie mit GeoGebra dynamisch darstellen und mit dessen Hilfe Sie quantitative Aussagen über Längen, Flächen, Winkel und Volumen der realen Pyramide und ihrer ursprünglichen Gestalt machen zu können.

Wenn Sie Lust haben weiter zu forschen, beschäftigen Sie sich außerdem mit dem System von Gängen und Schächten im Innern der Pyramide. Auch hier können Sie quantitative Aussagen über Längen, Steigungswinkel, Abstände, Luftvolumen etc. machen.

Wenn Sie nicht weiterkommen, können Sie sich die Tipps zu den Aufgaben anschauen. Zur Kontrolle Ihrer Ergebnisse können Sie sich den Lösungsvorschlag anschauen. Versuchen Sie aber zuerst, eine eigene Lösung zu finden.

1. <u>Aufgabe</u>

a) *Von der Realsituation zum realen Modell*

Diskutieren Sie in der Gruppe über Annahmen/ Vereinfachungen/ Idealisierungen, die Sie vornehmen wollen, um ein reales Modell der heutigen Cheops-Pyramide zu erstellen. Beschreiben Sie das reale Modell so genau wie möglich.

b) *Vom realen zum mathematischen Modell*

Übertragen Sie Ihr reales Modell in ein mathematisches Modell. Stellen Sie dieses Modell in einem dreidimensionalen Koordinatensystem dar.

c) *Vom mathematischen Modell zur mathematischen Lösung*

Beantworten Sie folgende Fragen zu Ihrem mathematischen Modell mit den Werkzeugen der Vektorgeometrie:

- Wie groß sind die Seitenflächen und wie lang sind die Steilkanten der heutigen Cheops-Pyramide?
- Welche Winkel treten an der Spitze der Seitenflächen auf?
  Welchen Neigungswinkel haben die Seitenflächen?
- Welches Volumen hatte die ursprüngliche Cheops-Pyramide?
  Wie viel Prozent des Volumens wurden im Laufe der Jahrhunderte abgetragen?
- …

d) *Passt die mathematische Lösung zur realen Situation?*

Überprüfen Sie, ob Ihre Ergebnisse zur realen Cheops-Pyramide passen.
Diskutieren Sie, wie die Vereinfachungen Ihres Modells die Ergebnisse beeinflussen.
Wie könnten diese Annahmen verbessert werden?

2. Aufgabe

a) Um zu mathematischen Aussagen über das System aus Grabkammern, Gängen und Schächten im Innern der Pyramide zu kommen, erweitern Sie Ihr mathematisches Modell. Sie legen dazu die Koordinaten der Punkte fest, die den Weg vom ursprünglichen Eingang bis zur Königskammer kennzeichnen. Sie geben Gleichungen für die Geradenabschnitte an, mit denen Sie diesen Weg beschreiben.

b) Beantworten Sie folgende Fragen zum erweiterten mathematischen Modell mit den Werkzeugen der Vektorgeometrie:

- Wie lang ist der Weg vom ursprünglichen Eingang bis zur Königskammer?
- Wie viel Prozent Gefälle hat der absteigende Korridor?
- Wie groß ist der Winkel zwischen dem absteigenden Korridor und der ursprünglichen Seitenfläche mit dem Eingang?
- Wie steil ist dieser Weg im steilsten Abschnitt?
- Wie groß war der Abstand der Königskammer zur ursprünglichen Seitenfläche mit dem Eingang?

Joker

c) Sie formulieren (mindestens) eine weitere Frage zum Gängesystem im Innern der Pyramide und beantworten sie in Ihrem mathematischen Modell.

Tipps zur 1. Aufgabe

a) Das reale Modell ist eine Pyramide. Sie beschreiben, inwiefern sich die reale Cheops-Pyramide von einer mathematischen Pyramide unterscheidet.

Außerdem gehen Sie von einer idealisieren Form der Pyramide aus und legen einen sinnvollen Genauigkeitsgrad für die quantitativen Größen fest.

b) Sie wählen ein räumliches Koordinatensystem, z.B. sodass die hintere linke Ecke der quadratischen Grundfläche der Koordinatenursprung ist, und zwei ihrer Seiten auf der x_1- bzw. der x_2-Achse liegen.

In diesem Koordinatensystem legen Sie die Koordinaten der fünf Pyramidenpunkte fest.

Sie zeichnen eine Parallelprojektion des räumlichen Koordinatensystems, tragen die Punkte ein und verbinden sie zur Pyramide.

In GeoGebra gibt es dafür das Werkzeug .

c) Sie berechnen mit Hilfe des Vektorproduktes den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den beiden Ortsvektoren von S bzw. A aufgespannt wird.
Alternativ: Sie berechnen mit dem Satz des Pythagoras die Seitenhöhen und berechnen den Flächeninhalt des Dreiecks wie üblich.
Die Länge der Steilkanten ist der Betrag des Ortsvektors von S.

Der Winkel an der Spitze ist der Winkel zwischen den Vektoren von der Spitze zu zwei benachbarten Quadratecken. Sie bestimmen zwei solche Vektoren und berechnen den Winkel mit Hilfe des Skalarproduktes dieser Vektoren.

Der Neigungswinkel der Seitenflächen ist der Winkel zwischen der x_1x_2-Ebene und der Geraden, die durch die Spitze und den Mittelpunkt einer Quadratseite verläuft. Sie berechnen den Winkel mit Hilfe des Skalarproduktes aus Richtungsvektor der Geraden und Normalenvektor der Ebene.

Das Volumen der heutigen und der ursprünglichen Pyramide berechnen Sie wie üblich aus Grundfläche und Höhe der jeweiligen Pyramide. Die Differenz setzen Sie ins Verhältnis zum ursprünglichen Volumen und erhalten so den gesuchten Anteil.

d) Sie können Ihre Ergebnisse überprüfen, indem Sie die Längen und Winkel der realen Pyramide auf der Fotografie schätzen und mit Ihren Berechnungen vergleichen.

Sie können aber auch die Daten der heutigen Cheops-Pyramide im Internet nachschlagen und zum Vergleich heranziehen.

Zur Beurteilung des Modells untersuchen Sie, welche Annahmen aus Teil a) zu eher zu kleinen oder eher zu großen Ergebnissen führen. Machen Sie dementsprechende Verbesserungsvorschläge.

Tipps zur 2. Aufgabe

a) Entscheiden Sie zunächst, auf welcher Seite Ihres mathematischen Modells der Eingang liegen soll. Der Querschnitt ist parallel zu zwei Grundseitenkanten und geht genau durch die Spitze. Die Maße des Querschnittplans beziehen sich auf die ursprüngliche Pyramide.

   Sie lesen aus dem Plan die Koordinaten der Punkte ab, die für den Weg zur Königskammer entscheidend sind, und rechnen Sie für das mathematische Modell um.

   Die Gleichungen für die Geradenabschnitte entsprechen denen der Geraden, allerdings mit eingeschränktem Definitionsbereich für die Parameter.

b) Der Gesamtweg setzt sich aus den Abständen zwischen den einzelnen Punkten zusammen.

   Das Gefälle ist der Tangens des Winkels gegenüber der x_1x_2-Ebene. Sie erhalten den Wert entweder, indem Sie zuerst den Winkel berechnen, oder mit Hilfe eines Steigungsdreiecks.

   Zur Winkelberechnung verwenden Sie den Richtungsvektor, der den absteigenden Korridor beschreibt, und den Normalenvektor der Ebene, in der die Seitenfläche liegt.

   Die beiden ansteigenden Abschnitte haben unterschiedliche Steigungen. Sie berechnen die größere Steigung wie vorher das Gefälle des absteigenden Korridors.

   Um den Abstand der Königskammer zur Seitenfläche zu bestimmen, geben Sie die Gleichung der Ebene, in der die Seitenfläche liegt, in Koordinatenform an und berechnen den Abstand wie üblich.

Lösungsvorschlag

1. <u>Aufgabe</u>

a) *Reales Modell*

Die reale Cheops-Pyramide ist aus Steinblöcken aufgebaut, sodass ihre Oberfläche nicht aus ebenen Dreiecken besteht. Für das Modell wird die Pyramide als Pyramide im mathematischen Sinn angenommen.

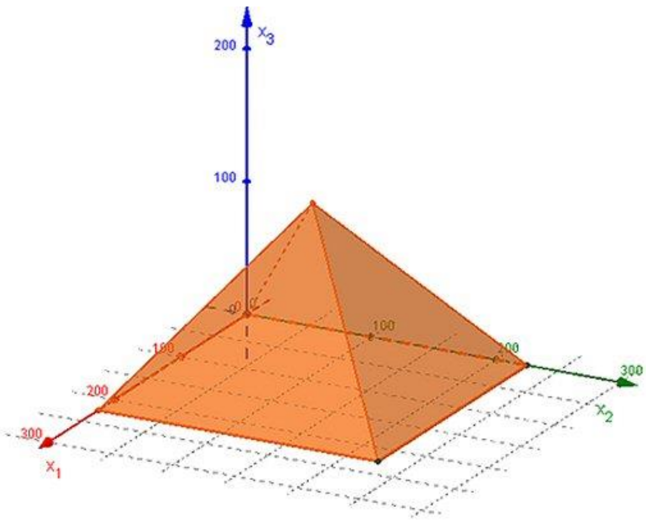
Für das Modell wird weiterhin angenommen, dass die Grundfläche ein Quadrat ist und dass die Pyramide regelmäßig ist.

Aufgrund dieser Vereinfachungen werden die Längenangaben im realen Modell auf ganze Meter gerundet.

b) *Mathematisches Modell*

Bei passender Wahl des Koordinatensystems sind die Eckpunkte des Quadrates z.B. $O(0|0|0)$, $A(225|0|0)$, $B(225|225|0)$ und $C(0|225|0)$.

Der Mittelpunkt des Quadrates ist $(112{,}5|112{,}5|0)$, die Spitze der Pyramide ist also $S(112{,}5|112{,}5|139)$.



c) *Seitenflächen*

Für jede der Dreiecksfläche gilt:

$$A = \frac{1}{2}\left|\vec{s}\times\vec{a}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix}112{,}5\\112{,}5\\139\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}225\\0\\0\end{pmatrix}\right| =$$

$$112{,}5\cdot\sqrt{139^2 + 112{,}5^2} \approx 20117{,}5$$

Die Seitenflächen sind etwa 20117 m² groß.

Länge der Steilkanten

$$s = \left|\begin{pmatrix}112{,}5\\112{,}5\\139\end{pmatrix}\right| = \sqrt{2\cdot 112{,}5^2 + 139^2} \approx 211$$

Die Steilkanten sind etwa 211 m lang.

Winkel an der Spitze

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{SO}\cdot\vec{SA}|}{|\vec{SO}|\cdot|\vec{SA}|} = \frac{|\vec{SO}\cdot\vec{SA}|}{211^2}, \text{ da } |\vec{SO}| = |\vec{SA}| \approx 211$$

$$= \frac{1}{211^2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-112{,}5\\-112{,}5\\-139\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}112{,}5\\-112{,}5\\-139\end{pmatrix}\right| = \frac{139^2}{211^2} \approx 0{,}434 \quad\Rightarrow\quad \alpha \approx 64{,}3\,°.$$

Neigungswinkel

Richtungsvektor der Seitenhalbierenden des Dreiecks OAS: $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 112{,}5 \\ 139 \end{pmatrix}$.

Normalenvektor der x_1x_2-Ebene: $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

$$\sin(\beta) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{139}{\sqrt{112{,}5^2 + 139^2}} \approx 0{,}777 \quad \Rightarrow \quad \beta \approx 51°$$

Volumen

… der ursprünglichen Pyramide: $V_1 \approx \frac{1}{3} \cdot 230^2 \cdot 147 \approx 2592100$

… der heutigen Pyramide: $V_2 \approx \frac{1}{3} \cdot 225^2 \cdot 139 \approx 2345625$

$\frac{V_1 - V_2}{V_1} \approx 0{,}095$

Es wurden etwa 9,5 % des ursprünglichen Volumens abgetragen.

d) Die realen Daten der heutigen Cheops-Pyramide sind:

- Neigungswinkel: 51° 50′
- Gesamtvolumen der ursprünglichen Pyramide ohne Abzug der Hohlräume: ≈ 2,58 Millionen m^3
- ursprüngliche Mantelfläche: etwa 85.500 m^2
- Durchschnittliche Maße der sichtbaren Steinblöcke: 1,0 m in Breite, Höhe und Tiefe.
- Durchschnittliches Gewicht eines Steinblocks: 2,5 Tonnen
- geschätzte Anzahl aller Steinblöcke: 2,3 Millionen
- geschätzte Gesamtmasse der Pyramide: 6,25 Millionen Tonnen

Unterschiede zwischen der Realität und den mathematischen Ergebnissen werden vor allem durch die Idealisierung der Form der Pyramide verursacht. Anstelle eines aus etwa 1 m hohen Schichten von quadratischen Quadern gebildeten Körpers wird ein kontinuierlich mit der Höhe abnehmender Durchmesser angenommen.

Diese Annahme führt dazu, dass die berechneten Ergebnisse größer sind als die realen Werte. Zur Verbesserung der Ergebnisse sollte die Höhe der Modellpyramide um angepasst werden.

2. <u>Aufgabe</u>

c)

Koordinaten

Ursprünglicher Eingang	$A(115 \mid 215 \mid 16)$
Anfang des aufsteigenden Korridors	$B(115 \mid 193 \mid 5)$
Ende des aufsteigenden Korridors	$C(115 \mid 157 \mid 22)$
Mittelpunkt der Königinnenkammer	$D(115 \mid 115 \mid 22)$
Ende der großen Galerie	$E(115 \mid 113 \mid 44)$
Mittelpunkt der Königskammer	$F(115 \mid 103 \mid 44)$

…

Geradenabschnitte

absteigender Korridor AB $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 215 \\ 16 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ -11 \end{pmatrix} \; ; \quad 0 \le t \le 1$

aufsteigender Korridor BC $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 193 \\ 5 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 17 \end{pmatrix} \; ; \quad 0 \le t \le 1$

große Galerie CE $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 157 \\ 22 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -44 \\ 22 \end{pmatrix} \; ; \quad 0 \le t \le 1$

letzter horizontaler Abschnitt EF $\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 115 \\ 113 \\ 44 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \; ; \quad 0 \le t \le 1$

d) *Länge des Weges vom Eingang bis zur Königskammer*

$$|\overrightarrow{AB}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ -11 \end{pmatrix} \right| = 11\sqrt{5} \approx 24{,}6$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 17 \end{pmatrix} \right| \approx 39{,}8$$

$$|\overrightarrow{CE}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -44 \\ 22 \end{pmatrix} \right| = 22\sqrt{5} \approx 49{,}2$$

$$|\overrightarrow{EF}| = \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \right| = 10$$

Der Weg ist insgesamt etwa 123,6 m lang.

Gefälle des absteigenden Korridors

Richtungsvektor des absteigenden Korridors $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -22 \\ -11 \end{pmatrix}$

$|\vec{u}| \approx 11 \cdot \sqrt{5} \approx 24{,}6$

Winkel gegenüber der x_1x_2-Ebene $\sin(\alpha) \approx \frac{11}{24{,}6} \approx 0{,}447$

$\tan(\alpha) = 0{,}5$

Der absteigende Korridor hat 50 % Gefälle.

Winkel der Geraden AB zur ursprünglichen Seitenfläche

Normalenvektor der Seitenfläche $\vec{n} = \begin{pmatrix} 115 \\ -115 \\ 147 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 230 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 230 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 147 \\ 115 \end{pmatrix}$

$|\vec{n}| \approx 230 \cdot 186{,}64 = 42927{,}2$

Winkel $\sin(\beta) = \frac{|\vec{n} \cdot \vec{u}|}{|\vec{n}| \cdot |\vec{u}|} \approx 0{,}9800$

$\beta \approx 78{,}5°$

Der Winkel des absteigenden Korridors gegenüber der Seitenfläche ist etwa 78,5°.

Steigung der großen Galerie

Richtungsvektor des aufsteigenden Korridors $\vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ -36 \\ 17 \end{pmatrix}$

Richtungsvektor der großen Galerie $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ -44 \\ 22 \end{pmatrix}$ steiler als BC

Steigung gegenüber der x_1x_2-Ebene $\tan(\alpha) = 0{,}5$

Die große Galerie hat 50 % Steigung.

Abstand der Königskammer zur ursprünglichen Seitenfläche

Ebene der Seitenfläche in Koordinatenform $147\ x_2 + 115\ x_3 = 33810$

Abstand des Punktes F zur Seitenfläche $d = \frac{33810 - (147 \cdot 103 + 115 \cdot 44)}{186{,}64} \approx 72{,}9$

Der Fußbodenmittelpunkt der Königskammer hatte zur ursprünglichen Seitenfläche mit dem Eingang etwa 73 m Abstand.