A1 : Les suites numériques

I/ Définition et représentation graphique :

1) Exemple d'introduction :

On considère une liste de nombres formée par tous les nombres impairs rangés dans l'ordre croissant : 1, 3, 5, 7, …

On note (u_n) l'ensemble des "éléments" de cette suite de nombres tel que :

$u_0 = 1$, $u_1 = 3$, $u_2 = 5$, $u_3 = 7$, …

On a ainsi défini une suite numérique.

On peut lui associer une fonction définie sur ℕpar u : $\begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) = u_n \end{array}$

2) Définition :

Une suite numérique (u_n) est une liste ordonnée de nombres réels telle qu'à tout entier n on associe un nombre réel noté u_n.

u_n est appelé le **terme de rang *n*** de cette suite (ou d'indice n).

3) Représentation graphique :

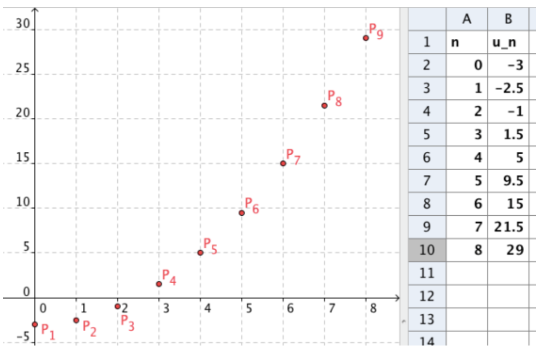
Dans un repère du plan, on représente une suite par un nuage de points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$.

Exemple :

Pour tout n de ℕ, on donne : $u_n = \dfrac{n^2}{2} - 3$.

On construit le tableau de valeurs avec les premiers termes de la suite :

n (coordonnée en abscisse)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n (Coordonnée en ordonnée)	-3	-2,5	-1	1,5	5	9,5	15	21,5	29



	A	B
1	n	u_n
2	0	-3
3	1	-2.5
4	2	-1
5	3	1.5
6	4	5
7	5	9.5
8	6	15
9	7	21.5
10	8	29
11		
12		
13		
14		

Remarque :

On peut également représenter les termes sur un axe gradué, mais c'est généralement moins efficace.

II/ Mode de génération d'une suite :

1) Par une formule explicite :

On nomme formule explicite, la formule permettant de calculer n'importe quel terme de la suite en fonction de n. C'est-à-dire que l'on peut calculer un terme de la suite juste en connaissant son rang dans la suite.

Exemples :

1) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $u_n = 2n+1$, qui définit la suite des nombres impairs.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 2 \text{ x } 0 + 1 = 1$,
$u_1 = 2 \text{ x } 1 + 1 = 3$,
$u_2 = 2 \text{ x } 2 + 1 = 5$,
$u_3 = 2 \text{ x } 3 + 1 = 7$.

2) Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne : $v_n = 3n^2 - 1$.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3 \times 0^2 - 1 = -1$,
$v_1 = 3 \times 1^2 - 1 = 2$,
$v_2 = 3 \times 2^2 - 1 = 11$,
$v_3 = 3 \times 3^2 - 1 = 26$.

Dans ces 2 exemples, chaque terme de la suite est exprimé en fonction de n et indépendamment des termes précédents.

2) Par une relation de récurrence :

Une suite est définie par une relation de récurrence lorsque l'on a une formule permettant de calculer un terme en utilisant le ou les précédents.

Exemples :

1) On définit la suite (u_n) par :
$u_0 = 5$ et chaque terme de la suite est le triple de son précédent.
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$u_0 = 5$,
$u_1 = 3 \text{ x } u_0 = 3 \text{ x } 5 = 15$,
$u_2 = 3 \text{ x } u_1 = 3 \text{ x } 15 = 45$.

2) On définit la suite (v_n) par :
$v_0 = 3$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $v_{n+1} = 4v_n - 6$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$v_0 = 3$,
$v_1 = 4v_0 - 6 = 4 \text{ x } 3 - 6 = 6$,
$v_2 = 4v_1 - 6 = 4 \text{ x } 6 - 6 = 18$,
$v_3 = 4v_2 - 6 = 4 \text{ x } 18 - 6 = 66$.

Contrairement à une suite définie par une formule explicite, il n'est pas possible, dans l'état, de calculer par exemple v_{13} sans connaître v_{12}.

Cependant il est possible d'écrire un algorithme sur une calculatrice programmable.

Ici on dit à la calculatrice que la première valeur de la suite est 3, ensuite on lui demande de calculer toutes les valeurs de v_1 à v_{13} et de les afficher.

Autre exemple :
On définit la suite (w_n) par :
pour tout n de $\mathbb{N}\backslash\{0\}$, $w_n = 1+2+3+...+n$
Les premiers termes de cette suite sont donc :
$w_1 = 1$,
$w_2 = w_1 + 2 = 1 + 2 = 3$,
$w_3 = w_2 + 3 = 3 + 3 = 6$,
$w_4 = w_3 + 4 = 6 + 4 = 10$.

Dans ce genre d'exemples, chaque terme de la suite s'obtient à partir d'un ou plusieurs des termes précédents. On connaîtra alors (au moins) le premier terme.

III/ Sens de variations d'une suite numérique :

1) Définition :

Soit un entier p et une suite numérique (u_n).

- La suite (u_n) est **croissante** signifie que $u_{n+1} \geq u_n$.
- La suite (u_n) est **décroissante** signifie que $u_{n+1} \leq u_n$.

Autrement dit une suite est croissante si les termes sont de plus en plus grands et décroissante si les termes sont de plus en plus petits.

2) Etudier les variations d'une suite :

a) Par le calcul :

Pour étudier les variations d'une suite il faut étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si celui-ci est positif alors la suite est croissante, si celui-ci est négatif alors la suite est décroissante.

Exemple:
Pour tout n de $\mathbb{N}$, on donne la suite (u_n) définie par : $u_n = -4n + 4$
Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

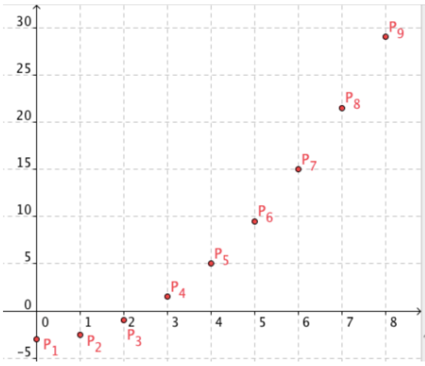
Calculons u_{n+1} :
$u_{n+1} = -4(n+1) + 4$ (On a simplement remplacé n par $n + 1$).
$u_{n+1} = -4n - 4 + 4$
$u_{n+1} = -4n$
Ensuite, on calcule la différence $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = -4n - (-4n + 4)$$
$$u_{n+1} - u_n = -4n + 4n - 4$$
$$u_{n+1} - u_n = -4$$

On remarque que – 4 est négatif donc on en déduit que la suite (u_n) est décroissante.

b) Graphiquement :

Reprenons le graphique précédent, les valeurs de u_n sont représenté en ordonnée. Donc plus le point est « haut » plus les valeurs de u_n sont grande. Ainsi une représentation graphique croissante, correspond à une suite croissante et inversement.



	A	B
1	n	u_n
2	0	-3
3	1	-2.5
4	2	-1
5	3	1.5
6	4	5
7	5	9.5
8	6	15
9	7	21.5
10	8	29
11		
12		
13		
14		

Pour se faire une idée sur le sens de variation d'une suite, on pourra observer sa représentation graphique (ou les valeurs de ses premiers termes). **Cependant le seul moyen de démontrer les variations d'une suite est de faire le calcul de $u_{n+1} - u_n$ et d'en étudier le signe.**