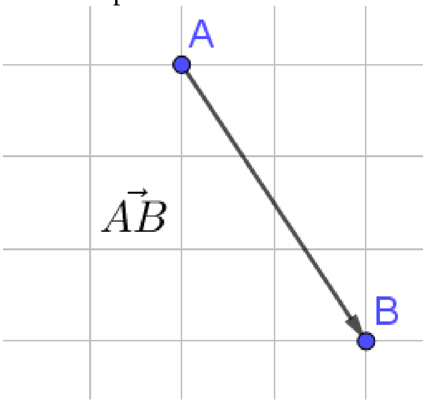
I/ définitions :

1) Rappels de seconde sur les vecteurs

En seconde nous avons découvert la notion de vecteurs. Le vecteur est un outil géométrique représentant une translation. Par exemple :



Ici nous avons le vecteur $\overrightarrow{AB}$ qui représente la translation du point A vers le point B. Si chaque carreau représente une unité, alors les coordonnées de ce vecteur sont (2 ; - 3). On donne toujours la coordonnée horizontale en premier.

Norme d'un vecteur :

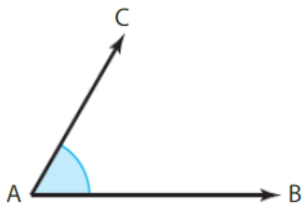
On nomme norme d'un vecteur la longueur de la flèche (donc la longueur du segment AB), qui pour le vecteur ci-contre se note : $\|\overrightarrow{AB}\|$. A l'aide du théorème de Pythagore, on peut démontrer que :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

2) Formule avec longueurs :

Le produit scalaire de deux vecteurs et un nombre réel, il se note avec un point, par exemple pour deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on notera le produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$$



Soient trois points A, B et C non alignés. Nous admettrons que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \times \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\widehat{BAC})$$

3) Formule avec coordonnées :

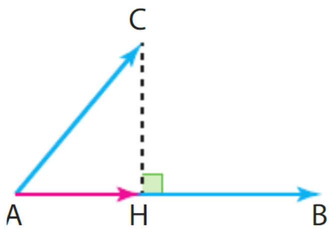
Soient deux vecteurs $\vec{u}$ $(x\,;\,y)$ et $\vec{v}$ $(x'\,;\,y')$. Nous admettrons que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y'$$

4) Calcul avec le projeté orthogonal :

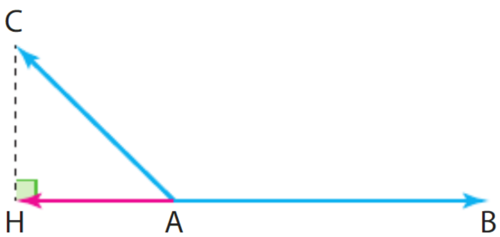
Deux cas possibles :

Cas 1 :



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AH}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$$

Cas 2 :



$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -\|\overrightarrow{AH}\| \times \|\overrightarrow{AB}\|$$

5) Exemples :

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\|\vec{u}\| = 2$, $\|\vec{v}\| = 3$ et $(\vec{u}\,,\,\vec{v}) = \frac{\pi}{4}$, alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 2\times 3\times\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 6\ \times\ \frac{\sqrt{2}}{2} = 3\sqrt{2}$$

(*Remarque, lorsque vous utilisez la calculatrice vérifier l'unité d'angle pour qu'elle corresponde à ce qui vous est donné*)

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs tels que $\vec{u}\ (-2\,;3)$ et $\vec{v}\ (1\,;5)$ alors :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -2\times 1 + 3\times 5 = -2+15 = 13$$

6) Propriétés du produit scalaire.

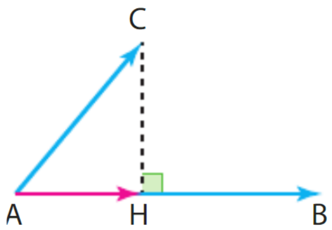
Le produit scalaire fonctionne de la même manière qu'une multiplication ainsi :

- $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- $\vec{u}\cdot\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$
- $\vec{u}\cdot k\vec{v} = k\vec{u}\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- $\vec{u}\cdot(\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{w}$

(*Remarque : Le vecteur nul fonctionne pour le produit scalaire comme le 0 dans une multiplication*.)

Propriété 1 :
Nous admettrons que si deux vecteurs sont orthogonaux (perpendiculaires) leur produit scalaire est nul.

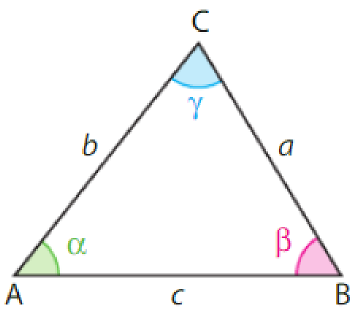
Propriété 2 :
Soient trois points non alignés A, B et C. Si H est le projeté orthogonal de C sur AB alors :



$$\|\overrightarrow{AH}\| = \|\overrightarrow{AC}\| \times \cos(\overrightarrow{AH},\overrightarrow{AC})$$

II/ Théorème de Al-Kashi :

Dans le triangle ABC quelconque, nous admettrons que :



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos(\widehat{\alpha})$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos(\widehat{\beta})$$

$$c^2 = b^2 + a^2 - 2ab\cos(\widehat{\gamma})$$