Números racionales. Caracterización.

Recuerda que un número r es racional si se puede poner en forma de fracción de números enteros de la forma $\frac{a}{b}$ (siendo el denominador $b \neq 0$).

Cada número racional puede representarse por un único número decimal (*exacto, con un número finito de decimales o con infinitas cifras decimales periódicas*) o por infinitas fracciones.

\# *Ejemplo:* $0{,}333333\ldots = \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$.

Convertir una expresión fraccionaria en expresión decimal

si r = $\frac{a}{b}$, para convertir r en decimal, basta con que efectuemos la división decimal a **:** b.

\# *Ejemplo:* $\frac{2454}{990} = 2{,}478787878\ldots = 2{,}\widehat{478}$

☞ **Todo número racional se escribir en forma decimal periódica**.

De la expresión fraccionaria a la expresión decimal

Cualquier número decimal periódico (*incluyendo números exactos o con un número de decimales limitado*) se puede expresar en forma de fracción $\frac{u}{v}$.

☞ Si D es un número racional escrito en forma decimal, es decir de la forma $D = a\,,b\,p\,p\,p\ldots$; con a, b, p número enteros.

1) Si $p = 0$, decimos que D es un número decimal con un número finito de decimales.

$$\Rightarrow D = \frac{u}{v} = \frac{D.10^m}{10^m}$$, siendo m el número de dígitos de v.

\# *Ejemplo:* $13{,}152 = \frac{13{,}152.10^3}{10^3} = \frac{13152}{1000}$

2) Si $p \neq 0$ y $b = p$, decimos que D es periódico puro de periodo p.

$$\Rightarrow D = \frac{u}{v} = \frac{D.10^n - D}{10^n - 1} = \frac{D.10^n - D}{99..\overset{n\ldots}{}.9}$$, siendo n el número de dígitos de p.

\# *Ejemplo:*

$$714{,}236423642364\ldots = \frac{714{,}236423642364\ldots.10^4 - 714{,}236423642364\ldots}{10^4 - 1} = \frac{7141650}{9999}$$

3) Si $p \neq 0$ y $b \neq p$, decimos que D es periódico mixto de periodo p.

$\Rightarrow D=\frac{u}{v}=\frac{D.10^{m+n}-D.10^{m}}{10^{m+n}-10^{m}}=\frac{D.10^{m+n}-D.10^{m}}{(99..^{n}.9)\ .\ 10^{m}}$ siendo m el número de dígitos de b y n el número de dígitos de p.

 # Ejemplo:

$$21{,}45369369369\ldots=\frac{21{,}45369369369\ldots.10^{2+3}-21{,}45369369369\ldots.10^{2}}{10^{2+3}-10^{2}}=\frac{2143224}{99900}$$

Números irracionales. Caracterización.

Los números irracionales (*que representamos por I*) son aquellos que no se pueden expresar en forma de fracción, o de forma equivalente su expresión decimal tiene infinitas cifras decimales no periódicas.

 # Ejemplo: $a=0{,}01001000100001\ldots$ *es un número irracional.*

Además, existen números que habitualmente utilizamos en todas las ramas científicas que son irracionales, y que por su importancia tiene un nombre propio, como $\pi=3{,}415926535897932384626 4\ldots$

Actividades para el aula:

Clasificar los siguientes números decimales en racionales o irracionales

a) 0,111222333111222333 …, b) 0,220200200020000200000 ...

c) 0,112122122212222122222 … d) 0,123321123321123321 …

Solución:

a) Racional b) Irracional. c) Irracional. d) Racional.

Números reales. Aproximación y error

Recuerda que $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}$, donde

$\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales = { $0,1,2,3,4,\ldots$ }.

$\mathbb{Z}$ es el conjunto de los números enteros = { $\ldots,-3,-2,-1,0,1,2,3,\ldots$ }.

$\mathbb{Q}$ es el conjunto de los números racionales = { $\frac{a}{b}:a,b\in\mathbb{Z},b\neq 0$ }

El conjunto de los números reales es $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup I$, además se cumple $\mathbb{Q}\cap I=\emptyset$

Aproximación de números irracionales. Errores.

Decimos que un número a es aproximado de A, cuando $A-a\neq 0$.

 # Ejemplo.- 1 es aproximado por defecto de $\sqrt{2}$ *, 1,5 es aproximado por exceso de* $\sqrt{2}$ *y 1,41 es aproximado por defecto de* $\sqrt{2}$.

Si a es un número aproximado de A, denominamos

Error absoluto a $\Delta = |A - a|$

Error relativo a $\delta = \dfrac{\Delta}{A} = \dfrac{|A-a|}{A}$

 # Ejemplo.- Si $A = \dfrac{10}{3}$ *y* $a = 3{,}3$ *, tenemos*

$$\Delta = \left|\frac{10}{3} - 3{,}3\right| = \left|\frac{10}{3} - \frac{33}{10}\right| = \left|100 - \frac{99}{30}\right| = \frac{1}{30} \qquad \delta = \frac{1/30}{10/3} = \frac{3}{300}$$

- Si el número exacto A es racional solemos utilizar fracciones.
- Si el número exacto A es irracional, no se puede utilizar ni fracción, ni forma decimal exacta o periódica, ya que el número irracional tiene infinitas cifras decimales no periódicas. En este caso, solemos utilizar cotas de error.

  # Ejemplo.- Si $A = \pi$ *y* $a = 3{,}15$ *, como* $3{,}14 < \pi < 3{,}15$ *es* $3{,}15 - \pi < 3{,}15 - 3{,}14$

  $$\Delta = |\pi - 3{,}15| = |3{,}15 - \pi| < 3{,}15 - 3{,}14 = 0{,}01 = \Delta_a$$

  $$\delta = \frac{\Delta}{\pi} < \frac{\Delta_a}{\pi} < \frac{\Delta_a}{3{,}14} = \frac{0{,}01}{3{,}14} = \frac{1}{314} = \delta_a$$

Habitualmente, representamos las cotas de error absoluto y relativo de un número aproximado a, mediante la notación Δ_a y δ_a respectivamente.

Números reales: operaciones

Cuando efectuamos operaciones con números racionales, es conveniente utilizar fracciones, para conseguir un resultado exacto. Sin embargo, cuando operamos con números irracionales es conveniente dejar dicha operación simplificada e indicada, por ejemplo: $\sqrt{8} + \pi = 2\sqrt{2} + \pi$,

Sin embargo, cuando necesitamos conocer una aproximación de una operación de números reales, tenemos que tener en cuenta, que al efectuar operaciones con números aproximados, el error que se comete depende de la operación. Para el cálculo de errores en las operaciones con números aproximados, aplicamos diversos métodos para calcular una cota de error.

 # Ejemplo.- si $a = 1{,}4142$ *es un número aproximado de* $\sqrt{2}$ *y* $b = 3{,}1415$ *de* π *, como* $1{,}4142 < \sqrt{2} < 14143$ *y* $3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$ *, se cumple*

$$1{,}4142 + 3{,}1415 < \sqrt{2} + \pi < 1{,}4143 + 3{,}1416$$

Y una cota de error de a+ b es $\Delta_{a+b} = |(1{,}4143 + 3{,}1416) - (1{,}4142 + 3{,}1415)|$ *, es decir*

$$\Delta = |\sqrt{2} + \pi - (a+b)| < 0{,}0002 = \Delta_{a+b}$$

Además

$$\delta=\frac{\Delta}{\sqrt{2}}+\pi<\frac{\Delta_{a+b}}{1{,}4143+3{,}1416}=\frac{0{,}0002}{4{,}5559}\approx 0{,}0000438$$

<u>Propiedades de la suma y producto de números reales</u>.

Recuerda que la suma y producto de números reales, cumple las mismas propiedades que los números racionales. Es decir, si a, b y c son tres números cualesquiera, se cumple

Propiedades de suma de números

$a+(b+c)=(a+b)+c$	propiedad asociativa
$a+b=b+a$	propiedad conmutativa
$a+0=a$	existencia de elemento neutro o nulo 0
$a+(-a)=0$	existencia de elemento opuesto de a

Propiedades de suma de números

$a(bc)=(ab)c$	propiedad asociativa
$ab=ba$	propiedad conmutativa
$a1=a$	existencia de elemento neutro o unidad 1
$aa^{-1}=1$	existencia de elemento inverso de a

Propiedades de producto y suma

$a(b+c)=ab+ac$	propiedad distributiva

<u>Números reales: radicales</u>.

Si $r\in\mathbb{R}$ es un número real, se cumple $\sqrt[n]{r}=y \quad \Leftrightarrow \quad y^n=r$.

Además, Si $r\in\mathbb{Q}$ es un número racional tal que no existe ningún racional $y\in\mathbb{Q}$ tal que $r=y^n$, $\sqrt[n]{r}$ es un número irracional.

 # Ejemplo.- Demostrar que $\sqrt{2}$ *es un número irracional.*

La demostración se hace por reducción al absurdo, es decir suponiendo que es cierto lo contrario y llegando a una contradicción.

Si suponemos que $\sqrt{2}$ *es racional, existirá dos números enteros primos a y b tal que* $\sqrt{2}=\frac{a}{b}$ *, elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, se obtiene*

$$2=\frac{a^2}{b^2} \quad \Rightarrow \quad 2.b^2=a^2 \quad \Rightarrow \quad \text{2 divide al número a}$$

Luego, se cumple

$2 . b^2 = (2 . k)^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 2 . k^2 \quad \Rightarrow$ *2 divide al número b*

Es decir, $m.c.d.(a, b) \neq 1$ *, en contra de lo supuesto (*a y b son primos entre si*), y por tanto llegamos a una contradicción.*

Luego $\sqrt{2}$ *es un número irracional.*

<u>Propiedades de operaciones con radicales</u>.

- ✗ $\sqrt[n]{a} . \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a . b}$
- ✗ $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$
- ✗ $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- ✗ $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m.n]{a}$

Además, dados dos números naturales n y m, si p es un número natural cualquiera y q un número que divide a n, se cumple

$$\sqrt[n.p]{a^{m.p}} = \sqrt[n/p]{a^{m/p}}$$

 # Ejemplo.- $\sqrt[3]{7^5} . \dfrac{\sqrt{2^4}}{\sqrt{21^3}} = \sqrt[3]{7^5} . \sqrt{\dfrac{2^4}{21^3}} = \sqrt[6]{7^{10}} . \sqrt[6]{\dfrac{2^{12}}{21^9}} = \sqrt[6]{\dfrac{2^{12} . 7^{10}}{21^9}} = \dfrac{4}{3} . \sqrt[6]{\dfrac{7}{9}}$

<u>Números reales: potencias</u>.

Si r y s, denominamos potencia de base r y exponente s al número r^s .

En el caso particular de que $s \in \mathbb{Q}$, decimos que r^s es una potencia fraccionaria. Además, en para todo m y n números naturales, se cumple $\sqrt[n]{r^m} = r^{\frac{m}{n}}$.

 # Ejemplo.- $\sqrt[3]{7^5} = 7^{\frac{5}{3}}$

Si s es un número irracional, utilizamos números aproximados.

<u>Propiedades de potencias</u>.

- ✗ $r^p . a^q = r^{p+q}$ *# Ejemplo.-* $7^{\frac{5}{3}} . 7^{\frac{2}{5}} = 7^{\frac{31}{15}}$
- ✗ $\dfrac{r^p}{r^q} = r^{p-q}$ *# Ejemplo.-* $7^{\frac{5}{3}} . 7^{\frac{2}{5}} = 7^{\frac{19}{15}}$
- ✗ $(r^p)^q = r^{p \cdot q}$ *# Ejemplo.-* $\left(7^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{6}{5}} = 7^2$
- ✗ $r^p . s^p = (r.s)^p$ *# Ejemplo.-* $7^{\frac{5}{3}} . 3^{\frac{5}{3}} = 21^{\frac{5}{3}}$

✗ $\frac{r^p}{s^p}=\left(\frac{r}{s}\right)^p$ *# Ejemplo.-* $\frac{7^{\frac{5}{3}}}{3^{\frac{5}{3}}}=\left(\frac{7}{3}\right)^{\frac{5}{3}}$

Números reales: logaritmos.

El logaritmo en base a de x es un número y tal que

$$\log_a x=y \quad \Leftrightarrow \quad a^y=x$$

Cuando a = 10 lo denominamos logaritmo decimal (*log*) y cuando a = e = 2,71828 lo denominamos logaritmo neperiano (*ln*)

 # Ejemplo.- $\log_2 \sqrt[3]{4}=\frac{2}{3}$

Propiedades de logaritmos.

✗ $\log_a x\,.\,y=\log_a x+\log_a y$

 # Basta tener en cuenta

$$x\,.\,y=a^{\log_a x.y}$$

$$x\,.\,y=a^{\log_a x}\,.\,a^{\log_a y}=a^{\log_a x+\log_a y}$$

 # Ejemplo.- $\log_3 9\,.\sqrt{3}=\log_3 9+\log_3 \sqrt{3}=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

✗ $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$

 # Basta tener en cuenta

$$\frac{x}{y}=a^{\log_a \frac{x}{y}}$$

$$\frac{x}{y}=\frac{a^{\log_a x}}{a^{\log_a y}}=a^{\log_a x-\log_a y}$$

 # Ejemplo.- $\log_3 \frac{9}{\sqrt{3}}=\log_3 9-\log_3 \sqrt{3}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

✗ $\log_a x^n=n\,.\log_a x$

 # Basta tener en cuenta

$$\log_a x^n=\log_a x\,.\,x^{n-1}=\log_a x+\log_a x\,.\,x^{n-2}=\log_a x+\log_a x+\log_a x\,.\,x^{n-3}=...=n\,.\log_a x$$

- *Los logaritmos se pueden obtener en cualquier base a a partir de los logaritmos decimales o neperianos de las calculadoras, ya que de la fórmula del cambio de base de lo logaritmos, para cualquier bases a y b se cumple*

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

En particular si b =10 o b = e, se cumple

$$\log_a x = \frac{\log x}{\log a} \qquad \log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

Problemas financieros.

Interés simple.

Llamamos interés (**I**), a la cantidad de dinero obtenido por la cesión o préstamo temporal de un determinado capital (**C**) en un periodo determinado (*días D, meses M o años N*), al tanto por ciento o rédito (**R**).

Dependiendo de que el capital C, lo tengamos en N años, M meses o D días el interés, será:

$$I = \frac{C.R.N}{100} = C.r.N \qquad (r = R/100)$$

$$I = \frac{C.R.M}{1200}$$

$$I = \frac{C.R.D}{36000} = C.r.N$$

Y al cabo de N años, M meses o D días el capital total que tendremos será:

$$C_T = C + I = C + \frac{C.R.N}{100} = C.\left(1 + \frac{R.N}{100}\right)$$

$$C_T = C + I = C + \frac{C.R.M}{1200} = C.\left(1 + \frac{R.M}{1200}\right)$$

$$C_T = C + I = C + \frac{C.R.D}{36000} = C.\left(1 + \frac{R.D}{36000}\right)$$

 # Ejemplo.- El capital producido por 5000 € al 4,6 % en 8 meses es

$$C_T = 5000.\left(1 + \frac{4{,}6.8}{1200}\right) = 5153{,}33\,€$$

Interés compuesto.

Es aquel cuyo interés producido en un periodo determinado (*días D, meses M o años N*) se aplica no solo al capital acumulado (*capital mas interés producido*).

Por ejemplo, si el capital C, tiene un interés anual R, el primer años tendremos el capital

$$C_1 = C + \frac{C.R}{100} = C.\left(1 + \frac{R}{100}\right)$$

El segundo año

$$C_2=C_1+\frac{C_1 . R}{100}=C_1 .\left(1+\frac{R}{100}\right)=C .\left(1+\frac{R}{100}\right)^2$$

El tercer año

$$C_3=C_2+\frac{C_2 . R}{100}=C_2 .\left(1+\frac{R}{100}\right)=C .\left(1+\frac{R}{100}\right)^3$$

Y así, sucesivamente el año n, será

$$C_n=C_{n-1}+\frac{C_{n-1} . R}{100}=C_{n-1} .\left(1+\frac{R}{100}\right)=C .\left(1+\frac{R}{100}\right)^n$$

Que en el caso de que el interés, sea mensual durante m meses o diario, durante d días, dichos capitales serán respectivamente:

$$C_m=C .\left(1+\frac{R}{1200}\right)^m$$

$$C_d=C .\left(1+\frac{R}{36000}\right)^d$$

Ejemplo.- El capital producido por 5000 € al interés compuesto del 4,6 % en 8 meses es

$$C_T=5000.\left(1+\frac{4{,}6}{1200}\right)^8=5155{,}41\,€$$

Anualidades de capitalización

Cuando depositamos durante n años una cantidad A (*denominada anualidad de capitalización*), por ejemplo, para un plan de ahorro o de pensión, a un interés compuesto del R .

Para saber el dinero que retiraremos al final, hay que tener en cuenta, que denominandoc

$$A_1=A.\left(1+\frac{R}{100}\right)^n \quad , \quad A_2=A.\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n-1} \quad , \quad A_3=A.\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n-2} \quad , \ldots , \quad A_n=A.\left(1+\frac{R}{100}\right)$$

Luego, el capital que podremos retirar al final, será la suma de todos los capitales que nos produce cada anualidad, que denominaremos S_n , y teniendo en cuenta que es la suma de los n primeros términos de una serie geométrica de razón $\left(1+\frac{R}{100}\right)$, será:

$$S_n=A_1+A_2+\ldots+A_n=A.\sum_{i=1}^{n}\left(1+\frac{R}{100}\right)^i=A.\frac{\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{R}{100}\right)}{1-\left(1+\frac{R}{100}\right)}=A.\left(\frac{(1+r)^{n+1}-(1+r)}{r}\right)$$

Ejemplo.- Si en un plan de pensiones depositamos 2500 € al principio de cada año durante 25 años a un interés compuesto del 5,5%, al final podremos retirar

$$S_{25}=2500.\left(\frac{(1+0{,}055)^{26}-(1+0{,}055)}{0{,}055}\right)=134\,914{,}95\,€$$

Anualidades de amortacización

Cuando amortizamos durante n años una cantidad A (*denominada anualidad de amortización*), por ejemplo, para amortizar una deuda D, a un interés compuesto del R ,

Para saber el dinero que tenemos que amortizar anualmente (**A**), hay que tener en cuenta, que el capital total en el que han de convertirse todas las anualidades, al cabo de los n años, ha de ser igual a la cantidad en la que se transforme la deuda de interés marcado durante ese tiempo

Denominando, A_1 , A_2 , A_3 , … , A_n , las anualidades que tendríamos que pagar el primer año, el segundo año, el tercer año, …. , el año n , respectivamente, y que serán:

$$A_1=A.\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n-1} \quad , \quad A_2=A.\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n-2} \quad , \quad A_3=A.\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n-3} \quad ,..., \quad A_n=A.\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n-n}=A$$

Y teniendo en cuenta, que la suma de todas las anualidades, tiene que ser igual a $D.\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}$, es decir:

$$D.\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}=A_1+A_2+...+A_n=A.\sum_{i=0}^{n-1}\left(1+\frac{R}{100}\right)^{i}=A.\frac{\left(1+\frac{R}{100}\right)^{n}-1}{1-\left(1+\frac{R}{100}\right)}=A.\left(\frac{(1+r)^{n}-1}{r}\right)$$

Que despejando A, será

$$A=\frac{D.(1+r)^{n}.r}{(1+r)^{n}-1}$$

Ejemplo.- Si se solicita un préstamo de $50\,000\,€$ *a devolver en 10 años a un interés compuesto anual del 4 %. La anualidad de amortización será:*

$$A=50000.\left(\frac{(1+0{,}04)^{10}.0{,}04}{(1+0{,}04)^{10}-1}\right)=6\,164{,}55\,€$$