Sbírka řešených příkladů

Výroky

Žán Pól Kastról

25. ledna 2022

Obsah

1 Zadání příkladů

Cvičení 1: TYŠER s. 4 Řešení ⇒

Zapište formulemi následující výroky s využitím daných výrokových proměnných:

$$P : \text{„}\textit{Zpráva je skenována proti virům.}\text{“}$$
$$Q : \text{„}\textit{Zpráva přišla z neznámé adresy.}\text{“}$$

a) Zpráva je skenována proti virům, kdykoli přijde z neznámé adresy.
b) Zpráva přišla z neznámé adresy, ale nebyla skenována proti virům.
c) Přijde-li zpráva z neznámé adresy, není skenována proti virům.
d) Není pravda, že je nutné skenovat zprávu proti virům, přijde-li z neznámé adresy.

Cvičení 2: TYŠER s. 4 cv (2) Řešení ⇒

Označíme

$$P : \text{„Ptolemáios je Řek.“}$$
$$R : \text{„Ramses je Egypťan.“}$$
$$Q_1 : \text{„Monet prodal svůj obraz.“}$$
$$Q_2 : \text{„Cézanne prodal svůj obraz.“}$$
$$Q_3 : \text{„Gauguin prodal svůj obraz.“}$$

Zapište formulemi následující výroky.
a) Ptolemáios není Řek.
b) Ptolemáios je Řek, zatímco Ramses je Egypťan.

c) Je-li Ptolemáios Řek, není Ramses Egypťan.
d) Ptolemáios je Řek nebo, pokud není, Ramses není Egypťan.
e) Ptolemáios je Řek a Ramses je Egypťan nebo ani jedno z toho.
f) Monet jako jediný z trojice Monet, Cézanne a Gauguin prodal obraz.
g) Gauguin jako jediný z trojice Monet, Cézanne a Gauguin neprodal obraz.
h) Pouze jediný z trojice Monet, Cézanne a Gauguin prodal obraz.
i) Alespoň jeden z trojice Monet, Cézanne a Gauguin prodal obraz.

Cvičení 3: TYŠER s.8 Řešení ⇒

Vytvoř tabulku pravdivostních hodnot pro formuli:

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \Rightarrow R)$$

Cvičení 4: TYS s.9 – Dektektivové Řešení ⇒

Tři politici **Achab**, **Bureš** a **Cizrna** jsou podezřelí ze spáchání zločinu. Vypověděli následovně:

Achab tvrdí: „Bureš je vinen a Cizrna je nevinný.“

Bureš tvrdí: „Je-li vinen Achab, je vinen i Cizrna.“

Cizrna tvrdí: „Jsem nevinen, ale aspoň jeden z dvojice Achab a Bureš je vinen.“

Jaké jsou odpovědi na otázky:

a) Mohou být všechny tři výpovědi pravdivé?
b) Jsou-li všichni nevinní, kdo vypovídal křivě?
c) Jsou-li výpovědi pravdivé, kdo je pachatel?
d) Mluví-li nevinní pravdu a viníci lžou, kdo je pachatel?

Cvičení 5: Pomeranče Hieronyma Bosche

Řešení ⇒

Jsou dány následující výroky tvaru implikace:

a) Jsou-li jablka žlutá, pak pomeranče Hieronyma Bosche jsou zelené.
b) Náš tým může vyhrát, pouze pokud v něm bude Karel Barel.
c) Každý Ind je vegetarián.

Ke každému výroku určete jeho *předpoklad* a *závěr* a dále:

- obměněnou implikaci (*kontrapozici*)
- obrácenou implikaci (*konverzi*)
- opak výroku (*negaci*)
- obrácení obměny (*inverzi*)

Cvičení 6: Tyšer s. 10/cv 1 a 2

Řešení ⇒

Vytvoř tabulku pravdivostních hodnot pro

a) $\neg(P \Leftrightarrow Q)$
b) $(P \vee Q) \wedge \neg(P \wedge Q)$
c) $(P \Rightarrow (\neg Q \wedge Q)) \Leftrightarrow \neg P$

Cvičení 7: Pravdomluvní a lháři

Řešení ⇒

Na ostrově žijí dva druhy obyvatel: pravdomluvní a lháři. Ti první mluví za všech okolností pravdu, ti druzí stále lžou.

a) Potkáme dva obyvatele P a Q a zeptáme se: „Je někdo z vás lhář?“ P odpoví: „Alespoň jeden z nás je lhář“. Lze určit, kdo jsou P a Q?
b) Potkáme dva obyvatele P a Q a zeptáme se P: „Je někdo z vás lhář?“ P odpoví: „Je-li Q lhář, pak i já jsem lhář“. Kdo jsou P a Q?
c) Potkáme dva obyvatele a zeptáme se: „Je někdo z vás pravdomluvný?“ Z odpovědi bylo možné určit, kdo je kdo. Jaká byla odpověď a jaký je náš závěr?
d) Potkáme tři obyvatele P, Q a R a zeptáme se P: „Jste lhář?“ P něco odpověděl, ale my jsme to přeslechli. Zeptáme se tedy Q: „Co říkal P?“ Q odpověděl: „Řekl, že je lhář.“ Pak se ozval R: „Nevěřte Q, je to lhář.“ Kdo je kdo?

Cvičení 8: TYS - s.14 cv.1

Řešení ⇒

Které z následujících formulí jsou *tautologie*, které *kontradikce* a které jsou *splnitelné*?

a) $\neg(P \Rightarrow \neg P)$
b) $P \vee (P \Rightarrow \neg P)$
c) $P \vee (Q \vee \neg Q)$
d) $\neg((P \vee \neg P) \Rightarrow Q)$
e) $\neg P \vee \neg(P \Rightarrow Q)$

2 Výsledky a řešení

Řešení cvičení 1: TYŠER s. 4 **Zadání ⇒**

Zapište formulemi následující výroky s využitím daných výrokových proměnných:

$$P : \text{„}\textit{Zpráva je skenována proti virům.}\text{“}$$
$$Q : \text{„}\textit{Zpráva přišla z neznámé adresy.}\text{“}$$

a) „Zpráva je skenována proti virům, kdykoli přijde z neznámé adresy.“
b) „Zpráva přišla z neznámé adresy, ale nebyla skenována proti virům.“
c) „Přijde-li zpráva z neznámé adresy, není skenována proti virům.“
d) „Není pravda, že je nutné skenovat zprávu proti virům, přijde-li z neznámé adresy.“

Výsledek:

a) $Q \Rightarrow P$
b) $Q \wedge \neg P$
c) $Q \Rightarrow \neg P$
d) $\neg (Q \Rightarrow P)$

Řešení:

a) Výrok je vlasně **implikace**. Můžeme si ho přeformulovat takto:

„Přijde-li zpráva z neznámé adresy, **potom** je skenována proti virům.“

Proto dostáváme

$$Q \Rightarrow P$$

b) Spojka „ale“ je z hlediska logického vlastně „a zároveň“.

Proto dostáváme

$$Q \wedge \neg P$$

c) Jedná se o implikaci (tu bychom mohli zdůraznit slovem „potom“).

Proto dostáváme

$$Q \Rightarrow \neg P$$

d) Spojení „Není pravda, že“ znamená negaci zbytku věty, která znamená totéž, co výrok a).

Proto dostáváme

$$\neg (Q \Rightarrow P)$$

Řešení cvičení 2: TYŠER s. 4 cv (2) Zadání ⇒

Označíme

$$\begin{aligned} P &: \text{„Ptolemáios je Řek."} \\ R &: \text{„Ramses je Egypťan."} \\ Q_1 &: \text{„Monet prodal svůj obraz."} \\ Q_2 &: \text{„Cézanne prodal svůj obraz."} \\ Q_3 &: \text{„Gauguin prodal svůj obraz."} \end{aligned}$$

Zapište formulemi následující výroky.

a) Ptolemáios není Řek.
b) Ptolemáios je Řek, zatímco Ramses je Egypťan.
c) Je-li Ptolemáios Řek, není Ramses Egypťan.
d) Ptolemáios je Řek nebo, pokud není, Ramses není Egypťan.
e) Ptolemáios je Řek a Ramses je Egypťan nebo ani jedno z toho.
f) Monet jako jediný z trojice Monet, Cézanne a Gauguin prodal obraz.
g) Gauguin jako jediný z trojice Monet, Cézanne a Gauguin neprodal obraz.

Výsledek:

Obsah...

Řešení:

Řešení cvičení 3: TYŠER s.8 Zadání ⇒

Vytvoř tabulku pravdivostních hodnot pro formuli:

$$(P \wedge Q) \vee (\neg P \Rightarrow R)$$

Výsledek:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg P \Rightarrow R$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \Rightarrow R)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Řešení:

Kolik bude mít tabulka číselných řádků? Vyvtvářím uspořádané trojice z nul a jedniček. Znaky se mohou opakovat. Na každém ze tří míst mohou být dva znaky (0 a 1). Počet množností je tedy $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$. Tabulka bude mít 8 číselných řádků (plus první řádek s výrokovými proměnnými). Při vyplňování tabulky je dobré mít nějaký systém, abych na nějakou možnost nezapomněl či aby se nějaké trojice neopakovaly. Používají se **dva systémy**:

- Začnu **třemi** jedničkami.

  Potom jedničku na posledním místě nahradím nulou. Nulu následně přesunu ještě doprostřed a potom na první místo. Tím jsou vyčerpány všechny možnosti, kdy jsou v trojici **dvě** jedničky.

Dále vezmu jen **jednu** jedničku – ta může být na začátku, uprostřed a na konci.

Zbývá poslední možnost – **nula** jedniček, čili tři nuly.

Dostávám toto:

A	B	C
1	1	1
1	1	0
1	0	1
0	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1
0	0	0

- Trojice chápu jako čísla v desítkové soustavě a seřadím je dvle velikosti. Nejmenší je $[0, 0, 0]$, potom $[0, 0, 1]$ atd. Dostanu toto:

A	B	C
0	0	0
0	0	1
0	1	0
0	1	1
1	0	0
1	0	1
1	1	0
1	1	1

Pokud se podíváme na jednotlivé sloupce, jistě hned vidíme řád, který nám může pomoci při rychlém vyplnění trojic pomocí sloupců. V prvním sloupci jsou 4 nuly a pod nimi 4 jedničky.

Ve druhém se střídají dvojice nul s dvojicemi jedniček. Ve třetím se střídájí nuly a jedničky.
Při řešení použijeme třeba druhý způsob. Pač zadaná formule je disjunkcí dvou závorek, je vhodné si přidat pro tyto závorky dva pomocné sloupce.

P	Q	R	$P \wedge Q$	$\neg P \Rightarrow R$	$(P \wedge Q) \vee (\neg P \Rightarrow R)$
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1

Řešení cvičení 4: TYS s.9 – Dektektivové

Zadání ⇒

Tři politici **Achab**, **Bureš** a **Cizrna** jsou podezřelí ze spáchání zločinu. Vypověděli následovně:

Achab tvrdí: „Bureš je vinen a Cizrna je nevinný.“

Bureš tvrdí: „Je-li vinen Achab, je vinen i Cizrna.“

Cizrna tvrdí: „Jsem nevinen, ale aspoň jeden z dvojice Achab a Bureš je vinen.“

Jaké jsou odpovědi na otázky:

a) Mohou být všechny tři výpovědi pravdivé?
b) Jsou-li všichni nevinní, kdo vypovídal křivě?
c) Jsou-li výpovědi pravdivé, kdo je pachatel?
d) Mluví-li nevinní pravdu a viníci lžou, kdo je pachatel?

Výsledek:

a) Ano, vidíme to v šestém řádku.
b) Křivě vypovídali politici Achab a Cizrna, viz poslední řádek.
c) Ze šestého řádku plyne, že pachatel je Bureš.
d) Pachateli jsou politici Achab a Cizrna.

Řešení:

Označíme si postupně písmenky A, B, C výroky:

***A*:** „Achab je nevinen.“

***B*:** „Bureš je nevinen.“

***C*:** „Cizrna je nevinen.“

Nyní můžeme jednotlivé výpovědi přepsat jako tyto formule:

Achab tvrdí: $\neg B \wedge C$

Bureš tvrdí: $\neg A \Rightarrow \neg C$

Cizrna tvrdí: $C \wedge (\neg A \vee \neg B)$

Abychom odpověděli na otázky, musíme si udělat tabulku pravdivostních hodnot pro tři výše uvedené formule:

	A	B	C	$\neg B \wedge C$	$\neg A \Rightarrow \neg C$	$C \wedge (\neg A \vee \neg B)$
1	0	0	0	0	1	0
2	0	0	1	1	0	1
3	0	1	0	0	1	0
4	0	1	1	0	0	1
5	1	0	0	0	1	0
6	1	0	1	1	1	1
7	1	1	0	0	1	0
8	1	1	1	0	1	0

Z tabulky vyčteme odpovědi na otázky:

a) Ano, vidíme to v šestém řádku.

b) Křivě vypovídali politici Achab a Cizrna, viz poslední řádek.

c) Ze šestého řádku plyne, že pachatel je Bureš.

d) To, že nevinní mluví pravdu a viníci lžou znamená, že musíme najít řádek, ve kterém je pravdivostní hodnota výroků A, B, C (první tři sloupce v tabulce) stejná jako pravdivostní hodnota výpovědí Achaba, Bureše a Cizrny (poslední tři sloupce v tabulce) tedy: Vidíme, že toto nastává pouze v řádku 3! Hodnoty u A, B, C jsou $[0; 1; 0]$ a hodnoty u výpovědí jsou rovněž $[0; 1; 0]$.

   To znamená, že pachatelí jsou Achab a Cizrna. Bureš z toho vyšel jako nevinný (zase jako vždycky)!

Řešení cvičení 5: Pomeranče Hieronyma B. Zadání ⇒

Jsou dány následující výroky tvaru implikace:

a) Jsou-li jablka žlutá, pak pomeranče Hieronyma Bosche jsou zelené.
b) Náš tým může vyhrát, pouze pokud v něm bude Karel Barel.
c) Každý Ind je vegetarián.

Ke každému výroku určete jeho *předpoklad* a *závěr* a dále:

- obměněnou implikaci (*kontrapozici*)
- obrácenou implikaci (*konverzi*)
- opak výroku (*negaci*)
- obrácení obměny (*inverzi*)

Řešení:

Připomeňme si, že k **implikaci** $A \Rightarrow B$ vytvoříme požadované výroky takto:

Obměna: $\neg B \Rightarrow \neg A$ (Je ekvivalentní s původní implikací!)
Obrácení: $B \Rightarrow A$ (To je často omylem považováno za obměnu!)
Negace: $A \wedge \neg B$
Inverze: $\neg A \Rightarrow \neg B$ (Ta je často omylem považována za negaci!)

a) Jsou-li jablka žlutá, pak pomeranče Hieronyma Bosche[a] jsou zelené.

[a] https://youtu.be/-lju39p_eQ4

Přepoklad: Jablka jsou žlutá.

Závěr: Pomeranče HB jsou zelené.

Obměna: Nejsou-li pomeranče HB zelené, potom jablka nejsou žlutá.

Obrácení: Jsou-li pomeranče HB zelené, potom jsou jablka žlutá.

Negace: Jablka jsou žlutá a zároveň pomeranče HB nejsou zelené.

Inverze: Nejsou-li jablka žlutá, potom pomeranče HB nejsou zelené.

b) Náš tým může vyhrát, pouze pokud v něm bude Karel Barel.

Větu si trochu přeformulujeme, aby z ním více trčela ta implikace. Tady ale bacha! Mohli bychom udělat chybu a větu vyslovit takto: *„Pokud v týmu bude Karel, potom náš tým vyhraje.“*
Proč je to špatně? Původní tvrzení nezaručuje, že s Karlem za každou cenu musíme vyhrát. Karel v týmu je pouze **nutnou podmínkou** vítězství. Bez něj určitě nevyhrajeme, ale s ním můžeme a nemusíme vyhrát. Takže před zápasem bychom řekli správně toto:

Pokud má náš tým vyhrát, potom v něm nutně musí být Karel Barel.

Přepoklad: Náš tým vyhraje.

Závěr: V týmu bude Karel.

Obměna: Nebude-li v týmu Karel, potom náš tým nevyhraje.

Obrácení: Pokud v týmu bude Karel, potom náš tým vyhraje. (Vidíme, že to je náš dřívější chybný pokus o přeformulování původní věty.)

Negace: Náš tým vyhraje a zároveň Karel v týmu nebude. (Náš tým vyhraje i bez Karla.)

Inverze: Pokud náš tým nevyhraje, potom v týmu nebyl Karel.

Na závěr si ještě vše můžeme pěkně zpřehlednit tabulkou pravdivostních hodnot. Označíme přitom předpoklad a závěr takto:

$$V : \textit{Náš tým vyhraje}$$
$$K : \textit{V týmu bude Karel.}$$

		Implikace	Obměna	Obrácení	Inverze	Negace
V	K	$V \Rightarrow K$	$\neg K \Rightarrow \neg V$	$K \Rightarrow V$	$\neg V \Rightarrow \neg K$	$V \wedge \neg K$
1	1	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0	0
0	0	1	1	1	1	0

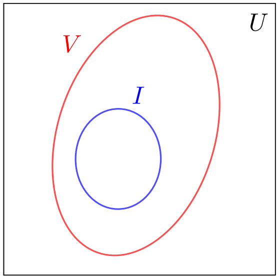
Tabulka nám připomíná, že původní *implikace* a její *obměna* jsou **logicky ekvivalentní** výroky (viz hodnoty v příslušných sloupcích.) A *obrácená implikace* je zasejc **logicky ekvivalentní** s inverzí, pač je to její obměna.

c) Každý Ind je vegetarián.

Tato věta má podobu **obecného výroku**. My si ji ale *přeformulujeme* do podoby **implikace**:

Je-li daný člověk Ind, potom je vegetarián.

Množinově to vypadá takto – množina všech Indů I je podmnožinou množiny V všech vegetariánů:



Přepoklad: Daný člověk je Ind.

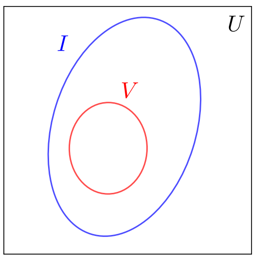
Závěr: Daný člověk je vegetarián.

Obměna: Není-li člověk vegetarián, potom není Ind. (Je-li daný člověk masožravý, potom není Ind. Každý ne-vegetarián je ne-Ind. Neexistují masožraví Indové.)

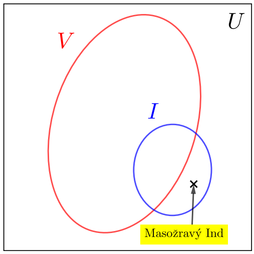
Množinově – viz původní implikace. Obměna je přece s původní implikací ekvivalentní.

Obrácení: Je-li člověk vegetarián, potom je Ind. (Každý vegetarián je Ind.)

Množinově to vypadá takto – množina všech vegetariánů V je podmnožinou množiny I všech Indů:



Negace: Daný člověk je Ind a zároveň není vegetarián. (Existuje aspoň jeden Ind, který je masožravý.) Množinově:



Inverze (obměna obrácené impl.): Není-li daný člověk Ind, potom není vegetarián. (Je-li člověk ne-Ind, potom je masožravý. Všichni ne-Indové jsou masožraví.)

Množinově – viz obrácená implikace. Inverze je přece s obrácenou implikací ekvivalentní.

Řešení cvičení 6: Tyšer s. 10/cv 1 a 2

Zadání ⇒

Vytvoř tabulku pravdivostních hodnot pro formule

a) $\neg(A \Leftrightarrow B)$
b) $(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
c) $(A \Rightarrow (\neg B \wedge B)) \Leftrightarrow \neg A$

Výsledek:

Viz řešení...

Řešení:

a) Jedná se o **negaci ekvivalence**. Stačí tedy v tabulce pro ekvivalenci změnit pravdivostní hodnoty na opačné. Zároveň víme (a ukazuje to i tabulka), že se jedná o *vylučovací disjunkci* – tedy o nebo ve **vylučovacím** smyslu – **Buď** A, **nebo** B, kterou značíme jako $A \veebar B$

A	B	$A \Leftrightarrow B$	$\neg(A \Leftrightarrow B)$	$A \veebar B$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	0	0

b) Je zřejmé, že se jedná opět o *vylučovací disjunkci* zapsanou jiným způsobem, což vokazuje krástně i tabulka:

A	B	$A \vee B$	$\neg(A \wedge B)$	$(A \vee B) \wedge \neg(A \wedge B)$
1	1	1	0	0
1	0	1	1	1
0	1	1	1	1
0	0	0	1	0

c) Formule $\neg B \wedge B$ má zřejmě vždy pravdivostní hodnotu 0. Proto implikace vlevo od dvojité šipky bude mít hodnotu 1 jen pro $v(A) = 0$.

A	B	$\neg B \wedge B$	$A \Rightarrow (\neg B \wedge B)$	$(A \Rightarrow (\neg B \wedge B)) \Leftrightarrow \neg A$
1	1	0	0	1
1	0	0	0	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

Vidíme, že daná formule má vždy pravdivostní hodnotu 1, pročež se jedná o **tautologii**.

Řešení cvičení 7: Pravdomluvní a lháři Zadání ⇒

Na ostrově žijí dva druhy obyvatel: pravdomluvní a lháři. Ti první mluví za všech okolností pravdu, ti druzí stále lžou.

a) Potkáme dva obyvatele P a Q a zeptáme se: „Je někdo z vás lhář?“ P odpoví: „Alespoň jeden z nás je lhář“. Lze určit, kdo jsou P a Q?

b) Potkáme dva obyvatele P a Q a zeptáme se P: „Je někdo z vás lhář?“ P odpoví: „Je-li Q lhář, pak i já jsem lhář“. Kdo jsou P a Q?

c) Potkáme dva obyvatele a zeptáme se: „Je někdo z vás pravdomluvný?“ Z odpovědi bylo možné určit, kdo je kdo. Jaká byla odpověď a jaký je náš závěr?

d) Potkáme tři obyvatele P, Q a R a zeptáme se P: „Jste lhář?“ P něco odpověděl, ale my jsme to přeslechli. Zeptáme se tedy Q: „Co říkal P?“ Q odpověděl: „Řekl, že je lhář.“ Pak se ozval R: „Nevěřte Q, je to lhář.“ Kdo je kdo?

Výsledek:

a) P je pravdomluvný, Q je lhář.

b) Oba jsou pravdomluvní.

c) Odpověď byla NE, odpovídající byl lhář a druhý byl pravdomluvný.

d) R je pravdomluvný, Q je lhář a P nelze určit.

Řešení:

a) Předpokládejme, že P je lhář. Potom je jeho výrok nepravdivý, takže pravdivá je negace výroku:

„Nikdo z nás není lhář.“

Ale to je spor s předpokladem, že je P lhář. Proto je P pravdomluvný. Takže jeho výrok je pravdivý. Druhý člověk, tedy Q, je proto lhář.

Úlohu lze také řešit tabulkou pravdivostních hodnot. Označme si postupně písmenky A, B výroky

A: „Člověk P mluví pravdu."

***B*:** „Člověk Q mluví pravdu."

Potom je $v(A) = 1$, pokud P mluví pravdu a $v(A) = 0$, pokud P lže. Podobně je $v(B) = 1$, pokud Q mluví pravdu a $v(B) = 0$, pokud Q lže.

Odpověď „Aspoň jeden z nás je lhář" člověka P můžeme zapsat formulí

$$\neg A \vee \neg B$$

Tabulka pro tuto formuli vypadá takto:

A	B	$\neg A \vee \neg B$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	1

V prvním řádku je $v(A) = 1$, takže člověk P mluví pravdu. To je ale ve sporu s tím, že jeho výrok má pravdivostní hodnotu nula, takže lže. Tuto možnost musíme vyloučit.

Ve druhém řádku je P pravdomluvný. To je v souladu s tím, že výrok P je pravdivý (v okýnku je 1) a s tím, Q lže ($v(B) = 0$). Tato možnost tedy může nastat.

Ve třetím a čtvrtém řádku je P lhář, ale zároveň je jeho výrok pravdivý, což je spor. Tuto možnost musíme vyloučit.

Vidíme tedy, že dostáváme jednoznačný výsledek, že P je pravdomluvný a Q je lhář.

b) Předpokládejme, že P je lhář. Potom je jeho výrok nepravdivý, takže pravdivá je negace výroku:

„Q je lhář a P není lhář."

To je ale spor. Proto P mluví pravdu. Co je Q? Kdyby byl lhář, potom by dle pravdivého tvrzení P byl i P lhář, což je spor. Takže i Q mluví pravdu. Oba jsou pravdomluvní.

c) Předpokládejme, že odpověď byla ANO. Pokud to řekl lhář, opak je pravdou, takže oba jsou lháři. Pokud to řekl pravdomluvec, tak může být ten druhý lhář nebo pravdomluvec. Vidíme, že z odpovědí ANO nelze nic zjistit. Pokud odpověď zněla NE, nemohl ji říci pravdomluvec, protože by minimálně o sobě lhal. Odpověděl tedy lhář a opak je pravdou – tedy je mezi nimi pravdomluvec, což musí být ten druhý. Odpověď byla NE. Odpovídající byl lhář a druhý byl pravdomluvný.

d) Odpověď Q je lež – P o sobě totiž nikdy nemůže prohlásit, že je lhář. Pač kdyby byl pravdomluvec, tak by lhal a kdyby byl lhář, tak by mluvil pravdu. To je spor. Proto je Q lhář a R mluví pravdu, takže R je pravdomluvný. Pač Q lže, tak P ve skutečnosti odpověděl, že mluví pravdu. Protože takto odpoví na otázku „Jste lhář" jak pravdomluvec, tak lhář, nelze o P nic říci.

Řešení cvičení 8: TYS - s.14 cv.1

Zadání ⇒

Které z následujících formulí jsou *tautologie* (pravdivá vždy), které *kontradikce* (vždy nepravdivá) a které jsou *splnitelné* (někdy pravdivá, někdy nepravdivá)?

a) $\neg(P \Rightarrow \neg P)$;
b) $P \vee (P \Rightarrow \neg P)$;
c) $P \vee (Q \vee \neg Q)$;
d) $\neg((P \vee \neg P) \Rightarrow Q)$;
e) $\neg P \vee \neg(P \Rightarrow Q)$;
f) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$;
g) $(P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg(Q \vee \neg P)$;
h) $((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \wedge \neg P$;
i) $(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R) \vee \neg(\neg P \vee R)$;
j) $\neg(\neg P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (R \vee \neg Q)$;
k) $((P \wedge R) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (R \wedge \neg(P \Rightarrow Q))$.

Výsledek:

Tautologie: b), c), f), i)

Kontradikce: h), k)

Splnitelné: a), d), e), g), j)

Řešení:

a) Formule zní:

$$\boxed{\neg(P \Rightarrow \neg P)}$$

Negací závorky je formule $P \wedge P$, která má hodnotu 1 pro $v(P) = 1$ a hodnotu 0 pro $v(P) = 0$. Formule je tedy splnitelná (může mít hodnotu 1), ale není tautologií, pač nemá vždy hodnotu 1.

Nechceme-li přemýšlet, uděláme si prostě tabulku:

P	$\neg P$	$P \Rightarrow \neg P$	$\neg(P \Rightarrow \neg P)$
1	0	0	1
0	1	1	0

b) Formule zní:

$$\boxed{P \vee (P \Rightarrow \neg P)}$$

Pro $v(P) = 1$ má implikace v závorce hodnotu 0 a celá disjunkce má tedy hodnotu 1. Pro $v(P) = 0$ má implikace v závorce hodnotu 1 a celá disjunkce má proto opět hodnotu 1. Jedná se tedy o tautologii.

Nechceme-li přemýšlet, uděláme si prostě tabulku:

P	$\neg P$	$P \Rightarrow \neg P$	$P \vee (P \Rightarrow \neg P)$
1	0	0	1
0	1	1	1

c) Formule zní:

$$\boxed{P \vee (Q \vee \neg Q)}$$

Formule v závorce má zřejmě vždy hodnotu 1. Proto má celková disjunkce vždy hodnotu 1. Je to tedy tautologie.

Nechceme-li přemýšlet, uděláme si prostě tabulku:

P	Q	$\neg Q$	$Q \vee \neg Q$	$P \vee (Q \vee \neg Q)$
1	1	0	1	1
1	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	0	1	1	1

d) Formule zní:

$$\boxed{\neg((P \vee \neg P) \Rightarrow Q)}$$

Provedeme-li negaci vnější závorky, dostáváme formuli

$$(P \vee \neg P) \wedge \neg Q$$

Výraz v závorce má vždy hodnotu 1, ale $\neg Q$ může mít hodnotu 0 i 1, takže celá konjunkce nabývá hodnoty 0 a 1. Formule je tedy splnitelná.

Nechceme-li přemýšlet, uděláme si prostě, jak já taky někdy lidově říkám, „tabulku" (měli bychom sice správně říkat *tabulku pravdivostních hodnot*, ale svět se snad pro jednou nezboří, když se trochu uvolníme a uděláme nějakou tu klukovinu nebo jak já taky někdy říkám „partyzánštinu".):

P	Q	$\neg P$	$P \vee \neg P$	$(P \vee \neg P) \Rightarrow Q$	$\neg((P \vee \neg P) \Rightarrow Q)$
1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
0	0	1	1	0	1

e) Formule zní:

$$\boxed{\neg P \vee \neg(P \Rightarrow Q)}$$

Znegujeme-li implikaci v závoře, vypadá naše formule takto

$$\neg P \vee (P \wedge \neg Q)$$

Použijeme-li *distributivní zákon*, dostaneme formuli

$$(\neg P \vee P) \wedge (\neg P \vee \neg Q)$$

První závora má vždy hodnotu 1, zatímco druhá může mít hodnotu 0 i 1. Proto celá konjunkce může nabývat hodnot 0 i 1, takže se jedná o formuli splnitelnou.

f) Formule zní:

$$\boxed{((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P}$$

Výraz už je trochu složitější. Frknem si to pro přehlednost do tabulky:

P	Q	$P \Rightarrow Q$	$(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$	$((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \Rightarrow P$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	1
0	1	1	0	1
0	0	1	0	1

Je to tautologie. Povšimněme si, že (viz hodnoty v tabulce) formule $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ je logicky ekvivalentní s P. To se bude hodit!

g) Formule zní:

$$\boxed{(P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg(Q \vee \neg P)}$$

Pravou stranu implikace upravíme – provedeme negaci, takže dostaneme $\neg Q \wedge P$. Celá formule vypadá tedy takto:

$$(P \vee \neg Q) \Rightarrow (\neg Q \wedge P)$$

Frknem si to pro přehlednost do tabulky:

P	Q	$P \vee \neg Q$	$\neg Q \wedge P$	$(P \vee \neg Q) \Rightarrow (\neg Q \wedge P)$
1	1	1	0	0
1	0	1	1	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0

Formule je tedy splnitelná. Podle hodnot v tabulce vidíme, že je logicky ekvivalentní s negací implikace, čili s *vylučovací disjunkcí* $P \veebar Q$.

h) Formule zní:

$$\boxed{((P \Rightarrow Q) \Rightarrow P) \wedge \neg P}$$

V příkladu f) jsme si povšimli, že formuli $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow P$ lze zjednodušit – je to totéž jako P. Tíme se celá naše formule smrkne na

$$P \wedge \neg P$$

To je ale kontradikce.

i) Formule zní:

$$\boxed{(P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R) \vee \neg(\neg P \vee R)}$$

Poslední disjunkci upravíme negací a dostáváme formuli

$$\varphi : (P \Rightarrow Q) \vee (Q \Rightarrow R) \vee (P \wedge \neg R)$$

Prdněmež to do tabulky:

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$P \wedge \neg R$	φ
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	1
0	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	1	1	1	1	0	1

Je to tautologie.

j) Formule zní:

$$\boxed{\neg(\neg P \Leftrightarrow Q) \Rightarrow (R \vee \neg Q)}$$

Předpoklad implikace si upravíme negací a máme

$$\varphi : (\neg P \veebar Q) \Rightarrow (R \vee \neg Q)$$

Prdněmež to do tabulky:

P	Q	R	$\neg P \veebar Q$	$R \vee \neg Q$	φ
0	0	0	1	1	1
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	1
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Z tabulky vidíme, že je to splnitelná formule.

k) Formule zní:

$$((P \wedge R) \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (R \wedge \neg(P \Rightarrow Q))$$

Označme levou stranu naší ekvivalence jako φ_1 a pravou jako φ_2. Upravíme postupně v několika krocích formuli φ_2:

$$\begin{aligned}
\varphi_2 &: R \wedge \neg(P \Rightarrow Q) \\
\varphi_2 &: R \wedge (P \wedge \neg Q) \\
\varphi_2 &: (R \wedge P) \wedge \neg Q \\
\varphi_2 &: (P \wedge R) \wedge \neg Q
\end{aligned}$$

Vidíme, že jsme dostali **negaci** levé strany φ_1! Ale potom jsou pravdivostní hodnoty formulí φ_1 a φ_2 vždy **opačné**, takže ekvivalence

$$\varphi_1 \Leftrightarrow \varphi_2$$

bude mít pravdivostní hodnotu vždy 0. Je to tedy kontradikce.