Teoría – Tema 5

Teoría - 9 - Espacio vectorial y combinación lineal

Introducción al concepto de espacio vectorial

Ya conocemos el **cuerpo de los números reales** $(\mathbb{R},+,\cdot)$, donde definimos dos propiedades internas: la suma y el producto. Los elementos de este cuerpo los representamos en la recta real unidimensional.

También conocemos el **cuerpo de los números complejos** $(\mathbb{Z},+,\cdot)$, que posee una suma y un producto como operaciones internas. Los elementos complejos no se representan en una recta, sino en el plano complejo bidimensional, ya que son un par de valores (a,b) .

Dentro de los complejos hemos hablado de vectores, como los segmentos orientados que unen el origen del plano complejo $(0,0)$ con el afijo $z=(a,b)$. Y sabemos que el módulo de un complejo es la longitud de su vector, y que el ángulo que forma con el semieje positivo real es su fase.

Pues bien, esta experiencia previa nos ayudará a comprender el **concepto de punto y de espacio vectorial**.

Si trabajamos en **dos dimensiones**, un punto P tendrá dos coordenadas (a,b) . Donde la primera coordenada a está asociada a la primera dimensión (que suele identificarse con el eje horizontal OX), y la segunda coordenada b está asociada a la segunda dimensión (que suele identificarse con el eje horizontal OY).

Tanto el eje OX como el eje OY son perpendiculares entre si, formando lo que se conoce como **sistema cartesiano**. Por eso, la pareja de valores (a,b) también se denomina producto cartesiano:

$$\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b)/a,b\in\mathbb{R}\}$$

Si hablamos de **tres dimensiones**, añadimos una tercera coordenada a los puntos: (a,b,c) . Esta tercera coordenada suele asociarse a un eje OZ perpendicular a los otros dos. Y se habla del conjunto:

$$\mathbb{R}^3=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b,c)/a,b,c\in\mathbb{R}\} \quad .$$

Por lo general podemos hablar de **n-dimensiones**, de tal forma que un punto vendrá representado por n-coordenadas: $(a,b,c,....,n)$.

Así tendremos el conjunto $\mathbb{R}^n=\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\{(a,b,c,...,n)/a,b,c,...,n\in\mathbb{R}\}$

En bachillerato trabajaremos, por lo general, en dos y tres dimensiones. Por lo que vamos a centrar nuestro estudio a $\mathbb{R}^2$ y a $\mathbb{R}^3$.

Dos puntos son iguales si sus componentes son iguales y están en el mismo orden.

Ejemplo en dos dimensiones.

$(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$(a,b)=(c,d)$ si y solo si $a=c, b=d$

Vamos a definir una operación interna para los puntos: la suma. Es una operación interna, como ya sabemos, porque el resultado final pertenece al mismo cuerpo al que pertenecen los sumandos. Es decir, la suma de dos puntos genera un nuevo punto.

Suma de elementos de R^2

$(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)\in\mathbb{R}^2$

Esta suma es:

- **Asociativa**.
- **Conmutativa**.
- Posee **elemento neutro** $(0,0)$.
- Posee **elemento simétrico** $(-a,-b)$, que al sumarlo al punto (a,b) da lugar al elemento neutro. El elemento simétrico de la suma es el elemento opuesto.

Con esto, decimos que $(\mathbb{R}^2,+)$ tiene estructura matemática de **grupo abeliano**. En $\mathbb{R}^3$ la suma cumple las mismas propiedades, añadiendo la tercera coordenada a nuestro razonamiento.

Consideremos ahora el producto de números reales del cuerpo $\mathbb{R}$ (una dimensión). Vamos a aplicar este producto a la pareja de valores de $\mathbb{R}^2$. Y llamaremos **escalares** a los números reales que se multiplican sobre los **pares ordenados** de $\mathbb{R}^2$.

Producto de escalar por par ordenado

$k\in\mathbb{R}$ $\rightarrow$ escalar

$(a,b)\in\mathbb{R}^2$ $\rightarrow$ par ordenador

$k\cdot(a,b)=(k\cdot a,k\cdot b)\in\mathbb{R}^2$

Esta multiplicación cumple las siguientes propiedades:

- Propiedad distributiva del producto de escalares respecto a la suma de pares ordenados.

$$k\in\mathbb{R}$$
$$(a,b),(c,d)\in\mathbb{R}^2$$
$$k\cdot[(a,b)+(c,d)]=k\cdot(a,b)+k\cdot(c,d)$$

- Propiedad distributiva de la suma de escalares respecto del producto por un par ordenador.

$$k_1,k_2\in\mathbb{R}$$
$$(a,b)\in\mathbb{R}^2$$
$$(k_1+k_2)\cdot(a,b)=k_1\cdot(a,b)+k_2\cdot(a,b)$$

- Propiedad asociativa mixta.

$$k_1, k_2 \in \mathbb{R}$$
$$(a, b) \in \mathbb{R}^2$$
$$k_1 \cdot [k_2 \cdot (a, b)] = (k_1 \cdot k_2) \cdot (a, b)$$

- Elemento neutro para el producto de un escalar por un par ordenador.

$$1 \in \mathbb{R}$$
$$(a, b) \in \mathbb{R}^2$$
$$1 \cdot (a, b) = (1 \cdot a, 1 \cdot b) = (a, b)$$

Con estas definiciones y propiedades se afirma que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ tiene estructura matemática de **espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales.** Donde $+$ indica la suma pares ordenados y $\cdot$ el producto de un escalar por un par ordenado.

Análogamente, se afirma lo mismo para $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$. Y en general, para $(\mathbb{R}^n, +, \cdot)$.

Vectores en el plano

El paso del concepto de par ordenado de los puntos de $\mathbb{R}^2$ al concepto de vector en el plano es inmediato.

Definición de vector

Dados dos puntos A y B , llamamos vector $\vec{AB}$ al segmento orientado que va del punto A al punto B . Al punto A se le llama **origen** del vector, y al punto B **extremo**.

El **módulo** del vector es la longitud del segmento determinado por los puntos origen y extremo.

La **dirección** es la recta que une los puntos origen y extremo, y la de sus rectas paralelas.

El **sentido** es el del recorrido desde el origen al extremo.

Conocidos los puntos origen y extremo de un vector, conocemos de manera única las componentes del vector.

Componentes del vector

Dados dos puntos $A(a_x, a_y)$ y $B(b_x, b_y)$, la coordenada horizontal y vertical del vector $\vec{AB}$ vienen dadas por:

$$x=b_x-a_x$$

$$y=b_y-a_y$$

$$\vec{AB}=(x,y)$$

Si trabajamos en tres dimensiones, tendremos un vector $\vec{AB}=(x,y,z)$, donde $z=b_z-a_z$.

Vectores equipolentes

Dos vectores son equipolentes si tiene el mismo módulo, dirección y sentido.

Dos vectores equipolentes pueden estar distribuidos por cualquier zona del plano.

Por ejemplo, los puntos $A(2,4)$ y $B(6,10)$ generan el vector $\vec{AB}=(6-2,10-4)=(4,6)$. A su vez, los puntos $C(5,7)$ y $D(9,11)$ generan el vector $\vec{CD}=(9-5,11-7)=(4,6)$. Los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{CD}$ con equipolentes, el primero con origen en el punto A y el segundo con origen en el punto C . Y así, habrá infinitos vectores equipolentes a $\vec{AB}$ y a $\vec{CD}$ (uno por cada punto del plano que sea origen del vector).

Al conjunto formado por un vector y sus infinitos equipolentes, se le llama **vector libre**. Y al representante único de un vector libre que tiene su origen en el origen de coordenadas $O(0,0)$ lo llamamos **representante canónico** de dicho vector.

En nuestro ejemplo el representante canónico sería el vector con origen el punto $O(0,0)$ y extremo $P(4,6)$, que genera el vector $\overrightarrow{OP}=(4-0,6-0)=(4,6)$.

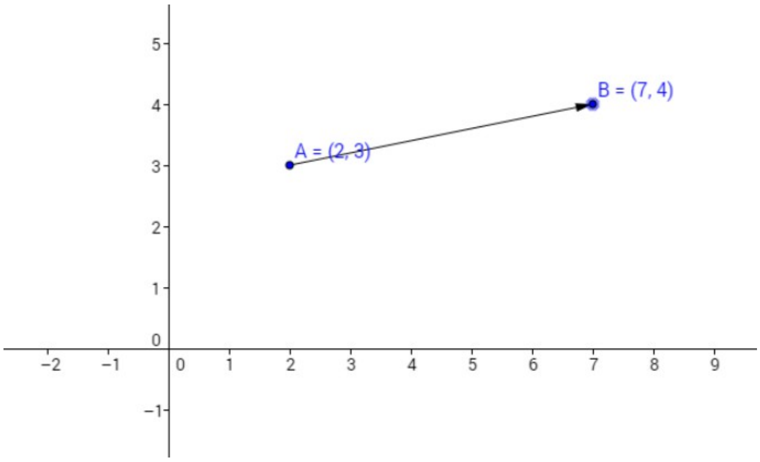
Nomenclatura

Si conocemos el punto origen $A(a_x, a_y)$ y el punto extremo $B(b_x, b_y)$ de un vector, lo representamos como $\overrightarrow{AB}=(x, y)$, de coordenadas $x=b_x-a_x$, $y=b_y-a_y$.

Otra opción sería representar el vector con una **letra minúscula**: $\vec{u}=(x, y)$. En este caso asumimos que trabajamos con el representante canónico del vector, con origen el punto $O(0,0)$ y extremo $P=(x, y)$, de tal forma que $\vec{u}=\overrightarrow{OP}=(x-0, y-0)=(x, y)$.

Si al trabajar con el par ordenado $(a, b)\in\mathbb{R}^2$ decíamos que $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ forma un espacio vectorial, ahora diremos lo mismo para los vectores. Estos vectores formarán el espacio vectorial $(V^2, +, \cdot)$. Los elementos de V^2 ya no son un par ordenado, sino vectores. Es decir, $\vec{u}\in V^2$.

$vector\ \ \vec{AB}\ \ con\ \ origen\ \ A(2,3)\ \ y\ \ extremo\ \ B(7,4)$



Suma y diferencia de vectores. Producto de escalar por vector

Dados dos vectores $\vec{u}=(a,b), \vec{v}=(c,d)\in V^2$, definimos la suma y la diferencia de vectores de la forma:

$$\vec{u}+\vec{v}=(a+c,b+d)$$

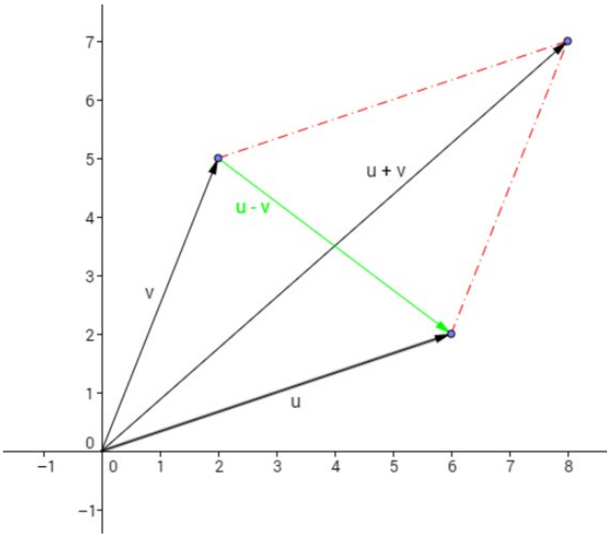
$$\vec{u}-\vec{v}=(a-c,b-d)$$

El resultado de estas operaciones es un nuevo elemento del espacio vectorial V^2 , por eso la suma de vectores es una operación interna del espacio vectorial.

La diferencia de vectores también podemos verla como la suma del primer vector más el opuesto del segundo. ¿Cómo entender **gráficamente** la suma y la diferencia de vectores?

Si trazamos paralelas por los extremos finales de $\vec{u}$ y $\vec{v}$ para formar un paralelogramo, la suma es la diagonal mayor del paralelogramo. Y la resta es la diagonal menor (con sentido desde el final del vector sustraendo hasta el final del vector minuendo).

suma y diferencia de vectores



En tres dimensiones los vectores $\vec{u}=(x_1,y_1,z_1), \vec{v}=(x_2,y_2,z_2)\in V^2$ se suman y restan de manera análoga a como hemos definido en dos dimensiones:

$$\vec{u}+\vec{v}=(x_1+x_2,y_1+y_2,z_1+z_2)$$

$$\vec{u}-\vec{v}=(x_1-x_2,y_1-y_2,z_1-z_2)$$

Un escalar es un número. Multiplicar un número por un vector implica multiplicar cada componente por el escalar. Por ejemplo, si $k\in\mathbb{R}$ y $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ podemos multiplicarlo:

$$k\cdot\vec{u}=(k\cdot u_x,k\cdot u_y,k\cdot u_z)$$

Combinación lineal de vectores. Sistema ligado

Sea el vector $\vec{u}$ del espacio vectorial V^n . Decimos que es **combinación lineal** de un conjunto de vectores $\vec{v}, \vec{w}, \vec{h}, \vec{t} \ldots \in V^n$ si podemos expresar $\vec{u}$ como resultado de la suma de los otros vectores, multiplicados por sus correspondientes escalares.

$$\vec{u}=\alpha\cdot\vec{v}+\beta\cdot\vec{w}+\gamma\cdot\vec{h}+\delta\cdot\vec{t}+\ldots$$

Al plantear esta igualad de vectores, llegaremos a un sistema de ecuaciones donde las incógnitas son los escalares $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots$.

Si el sistema tiene solución (ya sea SCD o SCI), el vector $\vec{u}$ se puede expresar en función de los otros vectores. Es decir, **existe al menos una ecuación que liga a todos los vectores entre sí**. Diremos que todos los vectores están en combinación lineal.

Si el sistema es incompatible, los vectores no están en combinación lineal.

Ejemplo 1 resuelto

¿Podemos expresar el vector $\vec{u}=(3,5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,2)$ y $\vec{w}=(-2,3)$?

Planteamos la definición de combinación lineal:

$$(3,5)=\alpha\cdot(1,2)+\beta\cdot(-2,3) \rightarrow (3,5)=(\alpha,2\cdot\alpha)+(-2\cdot\beta,3\cdot\beta) \rightarrow (3,5)=(\alpha-2\cdot\beta,2\cdot\alpha+3\cdot\beta)$$

Igualamos componentes (primera coordenada igual a primera coordenada, segunda coordenada igual a segunda coordenada):

$$\left\{\begin{matrix} 3=\alpha-2\cdot\beta \\ 5=2\cdot\alpha+3\cdot\beta \end{matrix}\right\}$$

Obteniendo un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas que debemos resolver.

De la primera ecuación del sistema podemos despejar $\alpha \rightarrow \alpha=3+2\cdot\beta \rightarrow$ Y sustituimos en la segunda ecuación:

$$5=2\cdot\alpha+3\cdot\beta \rightarrow 5=2\cdot(3+2\cdot\beta)+3\cdot\beta \rightarrow 5=6+4\cdot\beta+3\cdot\beta \rightarrow -1=7\cdot\beta \rightarrow \beta=\frac{-1}{7}$$

Con el valor de β obtenemos $\alpha \rightarrow \alpha=3+2\cdot\beta \rightarrow \alpha=3+2\cdot\left(\frac{-1}{7}\right) \rightarrow \alpha=\frac{19}{7}$

Podemos expresar $\vec{u}=(3,5)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,2)$ y $\vec{w}=(-2,3)$.

$$(3,5)=\frac{19}{7}\cdot(1,2)+\frac{-1}{7}\cdot(-2,3)$$

Como el sistema ha tenido solución, los tres vectores están en combinación lineal.

Ejemplo 2 resuelto

¿Podemos expresar $\vec{u}=(-2,1,1)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(0,1,0)$ y $\vec{t}=(0,0,1)$?

Planteamos la definición de combinación lineal:

$$(-2,1,1)=\alpha\cdot(1,0,0)+\beta\cdot(0,1,0)+\gamma(0,0,1) \quad\rightarrow\quad (-2,1,1)=(\alpha,\beta,\gamma)$$

Igualamos componentes (primera coordenada igual a primera coordenada, segunda coordenada igual a segunda coordenada, tercera coordenada igual a tercera coordenada):

$$\left\{\begin{matrix} -2=\alpha \\ 1=\beta \\ 1=\gamma \end{matrix}\right\}$$

Obteniendo un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas, cuya solución es directa.

Podemos expresar $\vec{u}=(-2,1,1)$ como combinación lineal de de los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(0,1,0)$ y $\vec{t}=(0,0,1)$.

$$(-2,1,1)=-2\cdot(1,0,0)+(0,1,0)+(0,0,1)$$

Los vectores están en combinación lineal.

Ejemplo 3 resuelto

¿Podemos expresar $\vec{u}=(4,1,2)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{v}=(1,0,0)$, $\vec{w}=(3,0,1)$ y $\vec{t}=(0,0,6)$?

Planteamos la definición de combinación lineal:

$$(4,1,2)=\alpha\cdot(1,0,0)+\beta\cdot(3,0,1)+\gamma(0,0,6) \quad\rightarrow\quad (4,1,2)=(\alpha+3\cdot\beta,0,\beta+6\cdot\gamma)$$

Igualamos componentes.

$\left\{\begin{matrix} 4=\alpha+3\cdot\beta \\ 1=0 \\ 2=\beta+6\cdot\gamma \end{matrix}\right\}$ → Absurdo matemático en la segunda ecuación → $1=0$ → Sistema Incompatible

El sistema no tiene solución. Los vectores no están en combinación lineal. No forman un sistema ligado.

Segunda forma de razonar para saber si un conjunto de vectores están en combinación lineal.

Si un vector $\vec{u}_1$ es combinación lineal de un conjunto de vectores $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$,..., $\vec{u}_n$, acabamos de estudiar que significa que podemos expresar el primer vector $\vec{u}_1$ como suma del resto de vectores, multiplicados por sus correspondientes escalares.

Si llevamos todos los vectores a un lado de la igualdad, podemos decir que un conjunto de vectores está en combinación lineal si existe al menos una ecuación del tipo:

$$\alpha\cdot\vec{u}_1+\beta\cdot\vec{u}_2+\gamma\cdot\vec{u}_3+...+\delta\cdot\vec{u}_n=\vec{0}$$ → con al menos un coeficiente $\alpha,\beta,\gamma,...,\delta$ no nulo

Donde el factor $\vec{0}$ indica el vector nulo.

Esta forma de razonar es útil cuando solo deseamos demostrar si todos los vectores están en combinación lineal.

Por otra parte, lo que estudiamos en el apartado anterior es el camino a seguir cuando queremos expresar un vector en función del resto de vectores y necesitamos obtener los coeficientes de dicha combinación.

Ejemplo 4 resuelto

¿Están los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ en combinación linea en V^2 ?

Planteamos la definición que hemos estudiado en esta segunda forma de razonar:

$$\alpha\cdot(1,1)+\beta\cdot(2,-3)=\vec{0}$$

$$(\alpha+2\cdot\beta,\alpha-3\cdot\beta)=(0,0)$$

Igualamos componentes y tenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas (las incógnitas son los parámetros α y β).

$$\begin{Bmatrix}\alpha+2\cdot\beta=0\\ \alpha-3\cdot\beta=0\end{Bmatrix}$$

Y este sistema tiene como solución única $\alpha=0$ y $\beta=0$. Por lo tanto, los vectores $\vec{v}=(1,1)$ y $\vec{w}=(2,-3)$ no están en combinación lineal.

Ejemplo 5 resuelto

¿Están los vectores $\vec{v}=(1,1)$, $\vec{w}=(2,-3)$ **y** $\vec{t}=(-1,0)$ **en combinación lineal?**

Planteamos la definición:

$$\alpha\cdot(1,1)+\beta\cdot(2,-3)+\gamma\cdot(-1,0)=\vec{0} \quad \rightarrow \quad (\alpha+2\cdot\beta-\gamma\,,\alpha-3\cdot\beta)=(0,0)$$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas con infinitas soluciones.

$$\left\{\begin{matrix}\alpha+2\cdot\beta-\gamma=0\\ \alpha-3\cdot\beta=0\end{matrix}\right\}$$

De la segunda ecuación despejamos el valor de α $\rightarrow$ $\alpha=3\cdot\beta$

Y llevamos este valor a la primera ecuación → $3\cdot\beta+2\cdot\beta-\gamma=0 \rightarrow 5\cdot\beta=\gamma$

Llegamos a una ecuación con dos incógnitas → una de esas incógnitas será un parámetro arbitrario.

$$\beta=\lambda\in\mathbb{R} \quad , \quad \gamma=5\cdot\lambda \quad , \quad \alpha=3\cdot\lambda$$

Si consideramos, por ejemplo, $\lambda=1$ $\rightarrow$ $\beta=1$, $\gamma=5$, $\alpha=3$

Existe una solución con al menos un coeficiente no nulo, por lo que los vectores están en combinación lineal.