Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Solución de sistemas de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes

Sistemas de ecuaciones diferenciales

Es un conjunto de varias ecuaciones diferenciales con varias variables y un conjunto de condiciones iniciales. Una solución del mismo es un conjunto de funciones diferenciables que satisfacen todas y cada una de las ecuaciones del sistema.

Ejemplo

$$x' + y = 3$$

$$y' - 2x = 5$$

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constante aplicamos trasformada de Laplace a cada una de las ecuaciones resolvemos el sistema de trasformadas y buscamos las soluciones para cada una de las variables

Ejemplo

$$x' + y = 3$$

$$y' - 2x = 5$$

Para resolver un sistema de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constante aplicamos trasformada de Laplace a cada una de las ecuaciones resolvemos el sistema de trasformadas y buscamos las soluciones para cada una de las variables

Ejemplo

Resolver mediante transformada de Laplace el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = 2x - 3y$$

$$\frac{dy}{dt} = y - 2x$$

Con las condiciones $x(0) = 8$ y $y(0) = 3$

Desarrollo

Tomemos $T\{x\} = X$ y $T\{y\} = Y$

Aplicamos transformada de Laplace a cada una de las ecuaciones

Trabajamos en la primera ecuación diferencial

$$T\left\{\frac{dx}{dt}\right\} = T\{2x - 3y\}$$

$$sT\{x\} - x(0) = 2T\{x\} - 3T\{y\}$$

$$sT\{x\} - 8 = 2T\{x\} - 3T\{y\}$$

$$(s-2)T\{x\} + 3T\{y\} = 8$$

Obtenemos la ecuación (1)

$$(s-2)X + 3Y = 8$$

Trabajamos en la segunda ecuación diferencial

$$T\left\{\frac{dy}{dt}\right\} = T\{y - 2x\}$$

$$sT\{y\} - y(0) = T\{y\} - 2T\{x\}$$

$$sT\{y\} - 3 = T\{y\} - 2T\{x\}$$

$$(s-1)T\{y\} + 2T\{x\} = 3$$

Obtenemos la ecuación (2)

$$(s-1)Y + 2X = 3$$

$$2X + (s-1)Y = 3$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} s-2 & 8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}}$$

$$Y = \frac{3(s-2)-16}{(s-2)(s-1)-6}$$

$$Y = \frac{3s-22}{(s-4)(s+1)}$$

Por fracciones parciales

$$Y = \frac{5}{(s+1)} - \frac{2}{(s-4)}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones mediante determinantes

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 3 & s-1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} s-2 & 3 \\ 2 & s-1 \end{vmatrix}}$$

$$X = \frac{8(s-1)-9}{(s-2)(s-1)-6}$$

$$X = \frac{8s-17}{(s-4)(s+1)}$$

Por fracciones parciales

$$X = \frac{5}{(s+1)} + \frac{3}{(s-4)}$$

Aplicamos transformada inversa de Laplace

$$T^{-1}\{X\} = T^{-1}\left\{\frac{5}{(s+1)} + \frac{3}{(s-4)}\right\}$$

$$x(t) = 5T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} + 3T^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)}\right\}$$

$$x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$T^{-1}\{Y\} = T^{-1}\left\{\frac{5}{(s+1)} - \frac{2}{(s-4)}\right\}$$

$$y(t) = 5T^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)}\right\} - 2T^{-1}\left\{\frac{1}{(s-4)}\right\}$$

$$y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$

Luego la solución del sistema está dada por

$$x(t) = 5e^{-t} + 3e^{4t}$$

$$y(t) = 5e^{-t} - 2e^{4t}$$