Ejercicios de probabilidad condicionada

CURSO	**TEMA**	**WWW.DANIPARTAL.NET**
1ºBach CCSS	PROBABILIDAD	Colegio Marista "La Inmaculada" de Granada

EJERCICIO 1

El 40% de los incendios forestales en un país se deben a negligencias. Tomando este dato como probabilidad, ¿cuál es la probabilidad de que, al considerar dos incendios, al menos uno se deba a negligencias?

Forma 1 de resolverlo: usando intersección de sucesos independientes.

Llamemos N al suceso "incendio debido a negligencia". **Tomamos los porcentajes como probabilidades (ley de los grandes números)**.

La respuesta al ejercicio implica considerar tres casos diferentes:

$P(N,N)$→ los dos incendios se deben a negligencia.

$P(N,\bar{N})$→ el primero se debe a negligencia, pero el segundo no.

$P(\bar{N},N)$→ el primero no se debe a negligencia, pero el primero sí.

Los dos incendios son **independientes**, porque los motivos del segundo no dependen de los motivos del primero. Por lo tanto:

- $P(N,N)$ implica que se cumple N y N → intersección.

  $P(N,N) = P(N \cap N) = P(N) \cdot P(N)$ → son independientes: $P(N \cap N) = 0{,}4 \cdot 0{,}4 = 0{,}16$.
- $P(N,\bar{N})$ implica que se cumple N y su opuesto → intersección.

  $P(N,\bar{N}) = P(N \cap \bar{N}) = P(N) \cdot P(\bar{N})$ → son independientes: $P(N \cap \bar{N}) = 0{,}4 \cdot 0{,}6 = 0{,}24$.
- $P(\bar{N},N)$ es análogo a $P(N,\bar{N}) \rightarrow P(\bar{N} \cap N) = 0{,}24$.

La probabilidad que buscamos será la suma de los tres sucesos estudiados:

$P(N,N) + P(N,\bar{N}) + P(\bar{N},N) = 0{,}16 + 0{,}24 + 0{,}24 = 0{,}64$

Forma 2 de resolverlo: usando propiedades del suceso complementario.

El espacio muestral del suceso "causa de dos incendios" está formado por cuatro sucesos elementales:

$E = \{\{N,N\},\{N,\bar{N}\},\{\bar{N},N\},\{\bar{N},\bar{N}\}\}$

De los cuatro elementos, solo el suceso elemental $\{\bar{N},\bar{N}\}$ no cumple la condición de que al menos uno de los incendios se deba a negligencia. Por lo tanto, el suceso $\{\bar{N},\bar{N}\}$ es el suceso complementario al caso que nos pregunta el enunciado.

Sabemos que un suceso y su opuesto cumplen → $P(A) + P(\bar{A}) = 1 \rightarrow P(A) = 1 - P(\bar{A})$.

Por lo que probabilidad que estamos buscando será: $1 - P(\bar{N},\bar{N})$.

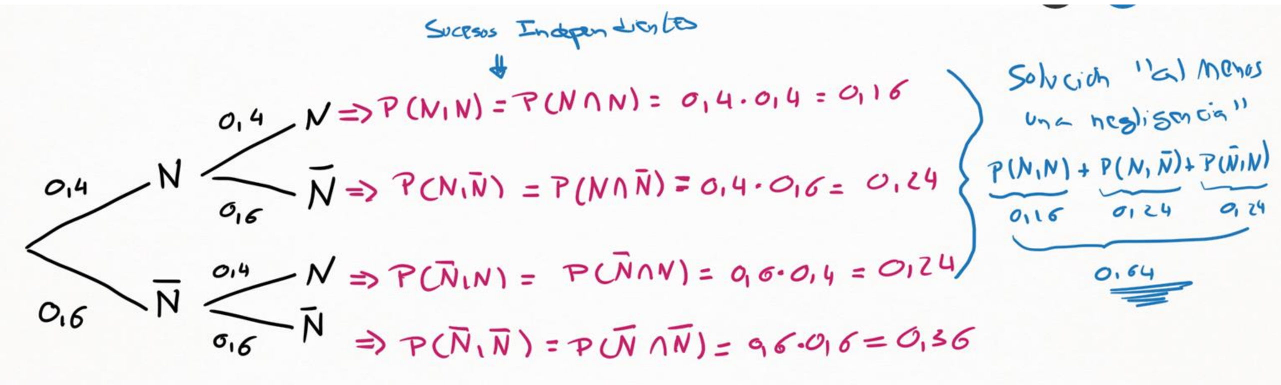
El valor de $P(\bar{N},\bar{N})$ es igual a $P(\bar{N} \cap \bar{N})$ porque debe cumplirse que no hay negligencia en el primer incendio y en el segundo incendio (recuerda que la conjunción "y" implica la intersección lógica).

$P(\bar{N} \cap \bar{N}) = P(\bar{N}) \cdot P(\bar{N})$→ son independientes: $P(\bar{N} \cap \bar{N}) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}36$.

La probabilidad solución es: $1 - 0{,}36 = 0{,}64$.

Forma 3 de resolverlo: con diagrama de árbol.

Dibujemos el diagrama de árbol de todos los sucesos posibles de las causas de dos incendios, sabiendo que las causas de un incendio no dependen de las causas del otro incendio (sucesos independientes).



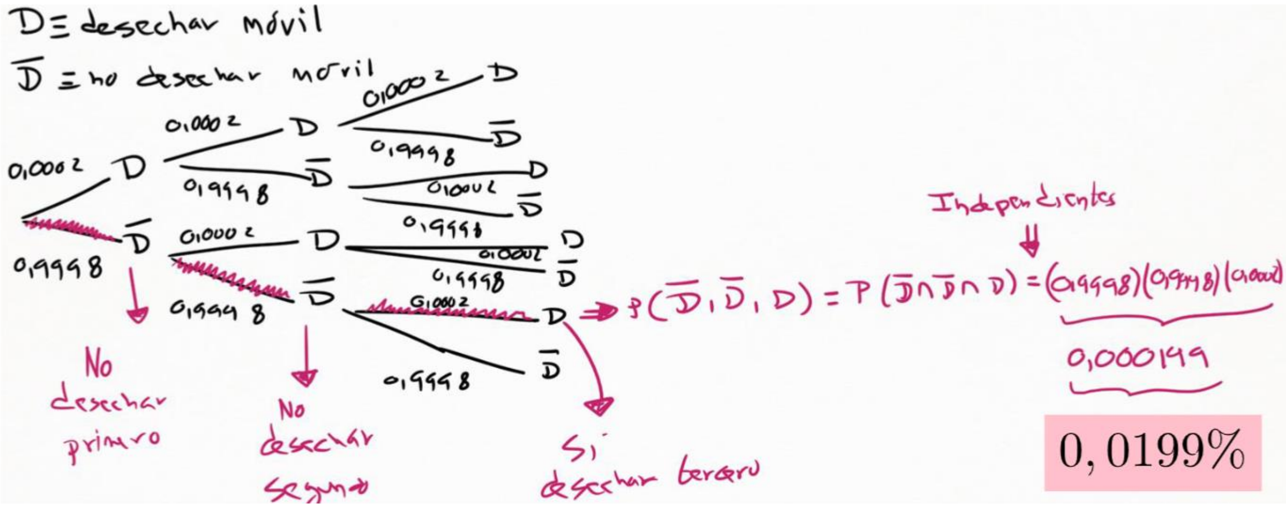
Como ves, el diagrama de árbol facilita mucho el razonamiento.

EJERCICIO 2

Una fábrica de móviles desecha el 0,02% de su producción por fallos. Calcula, mediante diagrama de árbol, la probabilidad de que al verificar 3 móviles haya que rechazar sólo al tercero (fíjate que el orden importa: debemos rechazar sólo el tercer móvil).

Volvemos a considera la ley de los grandes números: el porcentaje de la frecuencia relativa se aproxima al valor de la de probabilidad.

Nuevamente, estamos ante sucesos independientes: que el primer móvil sea o no defectuoso, no influye en el estado del segundo móvil. Y que el segundo móvil sea o no defectuoso, no condiciona el estado del tercer móvil.



La probabilidad que buscamos es el producto de las probabilidades de las tres ramas que generan el suceso $P(\overline{D},\overline{D},\overline{D}) = 0{,}9998 \cdot 0{,}9998 \cdot 0{,}0002 = 0{,}000199 = 0{,}0199\%$.

EJERCICIO 3

Disponemos de una moneda trucada en la que la probabilidad de obtener cara, al lanzarla, es el doble de la de obtener cruz.

a) Halle la probabilidad de que, al lanzar la moneda, se obtenga cara.

b) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga una cara y una cruz, sin importar el orden.

c) Halle la probabilidad de que, al lanzar dos veces la moneda, se obtenga al menos una cara.

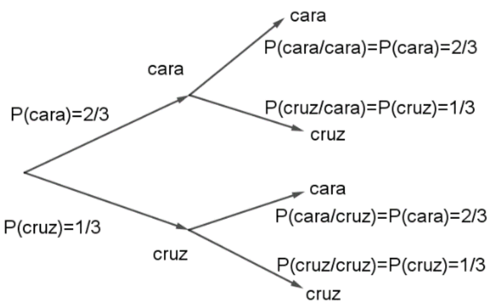
d) Si al lanzar la moneda dos veces observamos que ha salido al menos una cara, halle la probabilidad de que se obtengan dos caras.

a) La suma de la probabilidad de cara más la probabilidad de cruz debe ser igual a 1, ya que el espacio muestral de una tirada está formada por {cara, cruz}.

Por lo tanto, si P(cruz) = x tendremos P(cara) = 2x. Y razonamos así:

$$P(cruz) + P(cara) = 1$$
$$x + 2x = 1$$
$$3x = 1$$
$$x = 1/3$$
$$P(cruz) = 1/3$$
$$P(cara) = 2/3$$

b) Los dos lanzamientos son independientes. El resultado de la segunda moneda no depende de lo que haya pasado en la primera moneda, por lo que en el diagrama de árbol la probabilidad de cada rama coincide con las probabilidades de sacar cara o cruz.



Obtener una cara y una cruz implica sumar la probabilidad de los siguientes caminos del diagrama de árbol:

$$P(\text{cara y cruz}) + P(\text{cruz y cara}) = 2/3\cdot 1/3 + 1/3\cdot 2/3 = 4/9$$

c) Obtener al menos una cara es el complementario de no sacar ninguna cara. Es decir:

$$P(\text{al menos una cara}) = 1 - P(\text{cruz y cruz}) = 1 - (1/3\cdot 1/3) = 1 - 1/9 = 8/9$$

d) De todos los caminos que conllevan al menos una cara, debemos elegir solo aquel que implique sacar dos caras. Estamos ante una regla de Laplace, donde los casos favorables son P(cara y cara) y los casos totales son P(al menos una cara).

$$\frac{P(cara\ y\ cara)}{P(al\ menos\ una\ cara)} = \frac{\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{8}{9}} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$