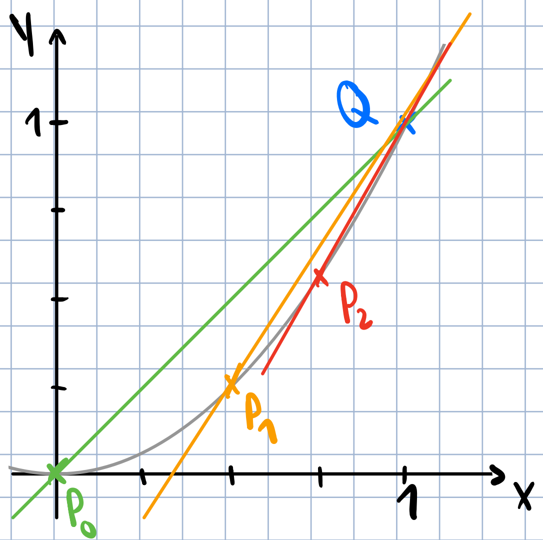
2. Differentialquotient und lokale Änderungsrate

Wir wollen von der Funktion $f: x \longmapsto x^2$ die Steigung im Punkt $Q(1|1)$ bestimmen.

<u>Idee</u>: Wir bestimmen die mittlere Änderungsrate zwischen $P(a|f(a))$ und Q und schieben P immer näher an Q heran.



$$m_{[0;1]} = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = \frac{1-0}{1-0} = 1$$

$$m_{[0,5;1]} = \frac{f(1)-f(0,5)}{1-0,5} = \frac{1-0,25}{1-0,5} = 1,5$$

$$m_{[0,75;1]} = \frac{f(1)-f(0,75)}{1-0,75} = \frac{1-0,5625}{1-0,75} = 1,75$$

Um vom Durchschnittswert zum lokalen Wert zu kommen, müssen wir den Grenzwert bilden:

$$m_1 = \lim_{x \to 1} \frac{f(1)-f(x)}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{1^2-x^2}{1-x} = \lim_{x\to 1} \frac{(1-x)\cdot(1+x)}{1-x}$$

$$= \lim_{x\to 1} x+1 = 2$$

MERKE

Existiert für eine Funktion f an der Stelle x_0 der Grenzwert der mittleren Änderungsrate $\quad m_{x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$,

dann heißt er <u>Differentialquotient</u> (oder <u>lokale</u> bzw. <u>momentane Änderungsrate</u>) von f an der Stelle x_0.

Die Gerade durch den Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$ mit der <u>Steigung</u> m_{x_0} heißt <u>Tangente</u> an den Graphen in P_0 und ihre Steigung entspricht der <u>Steigung</u> <u>des Graphen</u> im Punkt $P_0(x_0|f(x_0))$.

HINWEIS (h-Methode)

Eine andere Deutung wäre den Abstand h zwischen x und x_0 zu definieren und nun den Grenzwert $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ zu bestimmen.

Beispiel von oben mit der h-Methode:

$$m_1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1^2 + 2h + h^2 - 1^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h} \cdot (2+h)}{\cancel{h}}$$

$$= \lim_{h \to 0} 2+h = 2$$