

## Teoría – Tema 5

### Teoría - 16 - método de integración por partes

#### ¿Qué significa integrar por partes?

Sea la integral arbitraria  $\int f(x) dx$ . El método de integración por partes plantea que  $\int f(x) dx$  puede expresarse como dos partes diferenciadas: como un producto de funciones más una integral más sencilla que la de partida.

Supongamos que tenemos el producto de funciones  $u(x) \cdot v(x)$ . Su derivada será:

$$\frac{d}{dx}[u(x) \cdot v(x)] = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Si integramos esta expresión, obtenemos:

$$\int \frac{d[u(x) \cdot v(x)]}{dx} dx = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

La integral y la derivada son procesos inversos, por lo que:

$$u(x) \cdot v(x) = \int u'(x) \cdot v(x) dx + \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

Reordenamos:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Si conseguimos expresar  $\int f(x) dx$  como  $\int u(x) \cdot v'(x) dx$ , tendremos la integral del producto de una función derivable  $u(x)$  y de una función integrable  $v'(x)$ . Y el resultado será igual al producto  $u(x) \cdot v(x)$  más una nueva integral  $\int u'(x) \cdot v(x) dx$ .

Si **la nueva integral  $\int u'(x) \cdot v(x) dx$  es más sencilla que la original  $\int f(x) dx$** , tendrá sentido aplicar el método por partes. En caso contrario, debemos buscar otra opción.

La clave reside en saber qué parte de la integral de partida juega el papel  $u(x)$  y qué parte es  $v'(x)$ . El razonamiento debe ser el siguiente: la parte que pueda derivarse será  $u(x)$  y la parte que pueda integrarse fácilmente será  $v'(x)$ . De  $u(x)$  pasamos a  $u'(x)$  diferenciando, y de  $v'(x)$  pasamos a  $v(x)$  integrando.

#### Ejemplo 1 resuelto

Sea  $\int x \cdot \cos(x) dx$

Identificamos partes en la integral:

$$u = x \rightarrow \text{diferenciamos} \rightarrow du = dx$$

$$dv = \cos(x) dx \rightarrow \text{integramos} \rightarrow v = \text{sen}(x)$$

Por lo tanto podemos desarrollar la integral de partida de la siguiente forma:

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

$$\int x \cdot \cos(x) dx = x \cdot \text{sen}(x) - \int \text{sen}(x) dx$$

Donde observamos que la nueva integral que resulta tras aplicar partes es inmediata:

$$\int x \cdot \cos(x) dx = x \cdot \text{sen}(x) + \cos(x) + C$$

Este método es muy potente, y especialmente útil cuando podemos distinguir en la integral de partida términos "muy distintos entre sí". Como en el ejemplo anterior, por un lado  $x$  y por otro lado  $\cos(x)$ .