## LÍMITES. APLICACIONES

En este apartado analizaremos el límite desde un punto de vista "más aplicado". De hecho, analicemos primero 3 "ejemplos en la vida cotidiana" sobre:

**EL LÍMITE DE UNA FUNCIÓN CONSTANTE**

Sea f(x)=k con k un número real. Entonces:

$$\lim_{x \to c} k = k$$

Lo cual queda de manifiesto en el siguiente problema:

*En una competencia de 100 metros planos ¿interesa el número de carril elegido en relación a la distancia recorrida?*

Respuesta: Es claro que NO interesa el número de carril elegido en relación a la distancia recorrida, pues la competencia es de 100m planos y todos los participantes deben correr esa misma cantidad de metros, lo cual hace una analogía a elegir cualquier x=c, donde c serían los números de carriles (1,2,3,4,5,6,7,8) y k=100 metros

(Nota: este problema se les aplicó a 37 estudiantes de 14 a 17 años de edad y únicamente el 27% contestó correctamente)

**EL LÍMITE NO EXISTE:**

Pensemos ahora en el siguiente problema, análogo al caso de que el "límite no exista":

*Si en tu trabajo tu hora de entrada depende de la hora de entrada de Pepe: debes llegar a trabajar una hora después de que llega Pepe. Si Pepe no llega ¿A qué hora debes presentarte a trabajar?*

Respuesta: Si Pepe no llega yo no puedo llegar una hora después de que él ha llegado, pues él no ha llegado y yo debo llegar una hora después de su llegada; entonces no llego.

(Nota: este problema se les aplicó a 37 estudiantes de 14 a 17 años de edad y únicamente el 13.5% contestó correctamente).

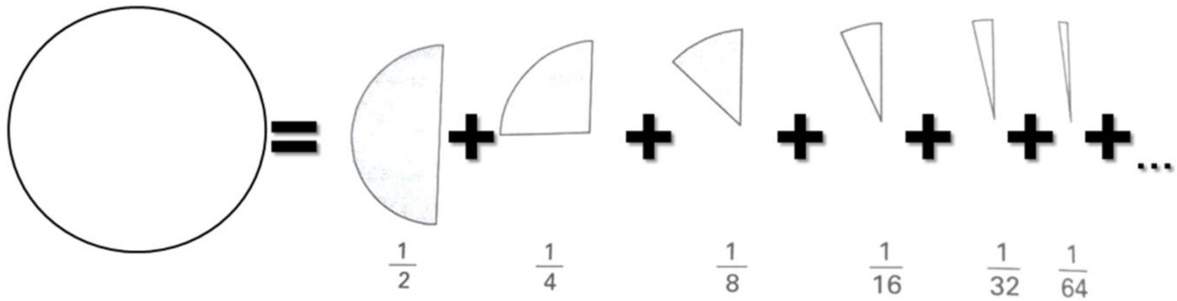
**EL LÍMITE DE UNA SERIE:**

Pensemos:

*En una fiesta de cumpleaños, recién llegado el pastel se terminan la mitad del mismo, en una hora más se comen la mitad de lo que quedó, en otra hora la mitad de lo que quedó y así sucesivamente para las siguientes horas. ¿En cuántas horas se terminarán el pastel?*

Respuesta: Antes que nada debemos fijarnos y comprender bien lo que dice de "la mitad de lo queda"

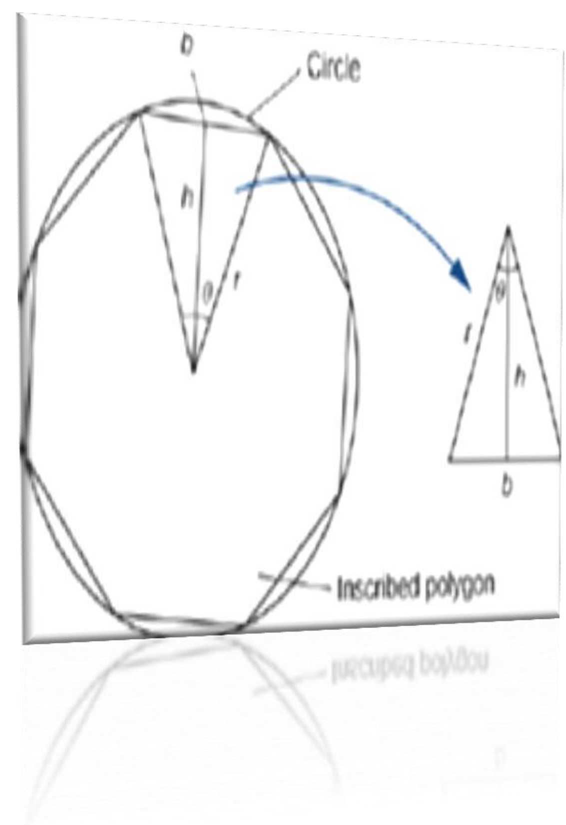
Recién llega se comen la mitad, pasada una hora se comen la mitad de la mitad que quedó, eso es un cuarto, la siguiente hora comen la mitad de lo queda, es decir la mitad de un cuarto, es decir, un octavo, a la siguiente hora la mitad de un octavo, es decir un dieciseisavo y así sucesivamente. Es decir, comen 1/2+1/4+1/8+1/16+1/32+1/64+…, lo que resulta ser una suma infinita, pues siempre habrá que tomar una mitad de lo que queda (así sea algo ínfimo -que a lo mejor nos sea difícil imaginar, pero por muy pequeño que sea, matemáticamente hablando, se puede seguir partiendo a la mitad-). Entonces, teóricamente el experimento sugiere que si sumamos la infinidad de fracciones al ir seccionando lo que queda del pastel, la suma queda como sigue:




Y por ende, el pastel se terminará en infinito número de horas.
(Nota: este problema se les aplicó a 37 estudiantes de 14 a 17 años de edad y únicamente el 13.5% contestó correctamente).

Ahora veamos otros 3 ejemplos adicionales:

**El área del círculo es el límite del área de un polígono inscrito (o circunscrito) de n lados, cuando n tiende a infinito**




Calcular áreas de figuras geométricas irregulares o de figuras curvas, suponía un problema, que hace 2500 años los griegos abordaron por medio del método del agotamiento, el cual consistía dividir las áreas de polígonos irregulares en triángulos cuya área se pudiera calcular con facilidad y después se sumaban dichas áreas. Si se trataba de calcular el área de una figura curva, lo que se hizo fue calcular el área de polígonos regulares inscritos y circunscritos (Ver app en apartado de aplicaciones). Los Griegos tampoco aplicaron explícitamente los límites, pero por medio del método de agotamiento pudieron probar la conocida fórmula del área del círculo (A=¶r2) (Jiménez M, 2015); particularmente, Arquímedes, para hallar el valor de π, imaginó un círculo encerrado entre un polígono inscrito y uno circunscrito de 96 lados respectivamente, halló un valor de π comprendido entre las fracciones 223/71 y 22/7. En el caso de un polígono regular, podemos dividirlo, trazando sus radios, en tantos triángulos isósceles iguales como lados tiene. Por lo tanto, su área será n.l.a/2, siento n el número de lados, l el # de lados del polígono y a la altura de cada triángulo, que es la apotema del polígono; pero n.l es el perímetro (p) del polígono, luego su área será p.a/2. La fórmula del área del círculo, en última instancia equivale a considerar que el círculo es un polígono regular de infinitos lados infinitamente pequeños, por lo que su apotema es el radio del círculo y su perímetro la longitud de la circunferencia, con lo que la fórmula p.a/2 se convierte en $2\pi r.r/2 = \pi r2$ (Fabretti C, 2019). (Ver applet en este capítulo)

**El límite de la velocidad de un objeto en movimiento es la velocidad de la luz.**

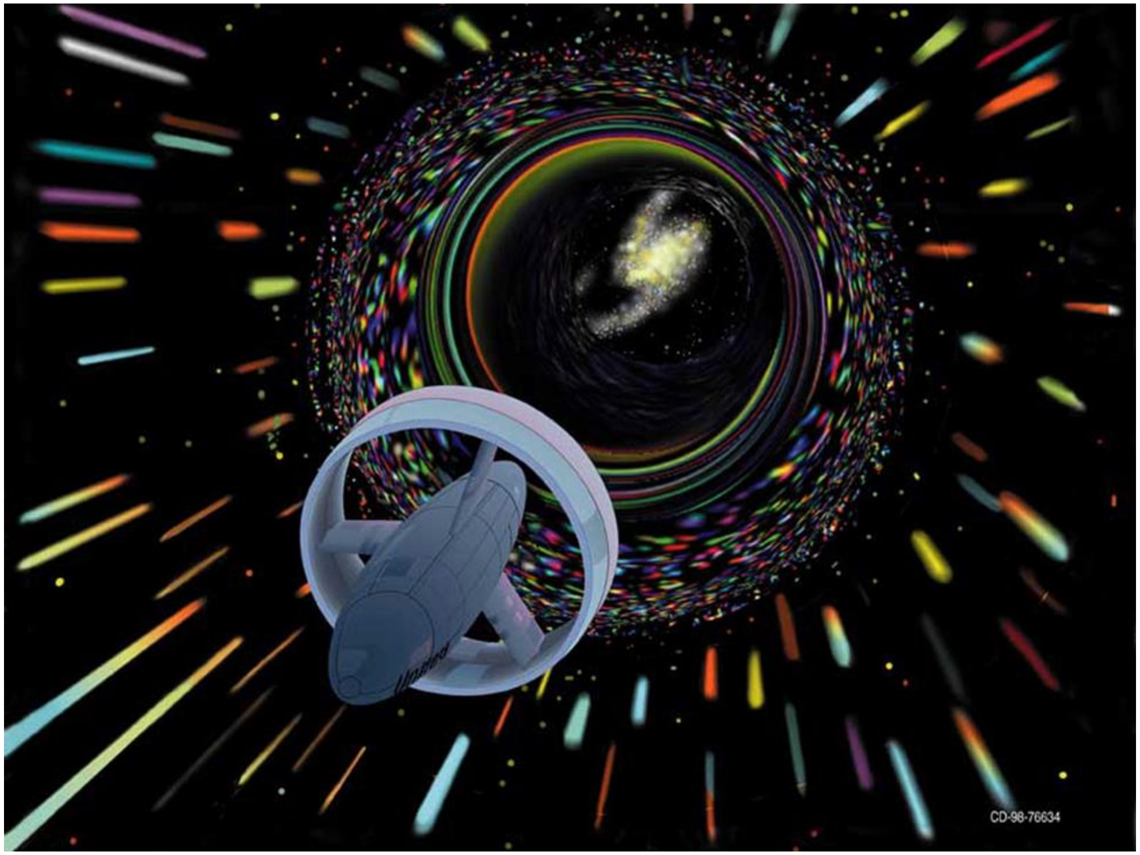



**Figura 1: La visión de la exploración humana por la NASA (National Aeronautics and Space Administration) de partes distantes del Universo (Esta figura ilustra la idea de que los viajes espaciales ocurren a altas velocidades)** (Herman E, et al, 2020).

Alguna vez te has preguntado si *¿Hay un límite en la velocidad a la que puede ir una nave espa*cial?

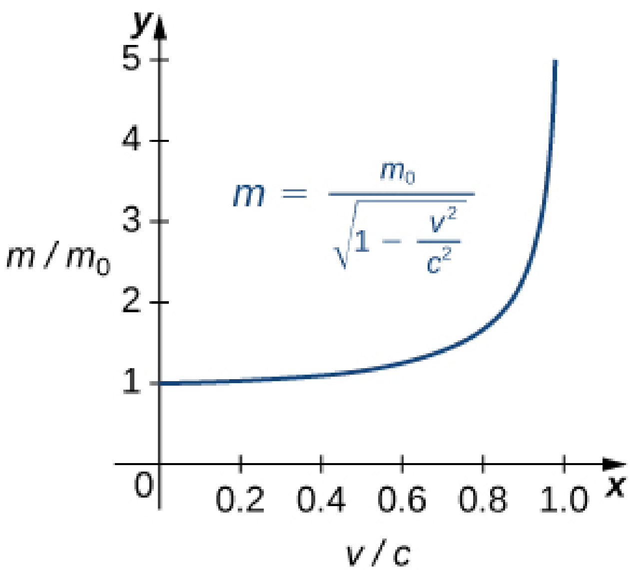
Albert Einstein demostró que existe un límite a la rapidez con la que puede viajar cualquier objeto, pues cuanto más rápido se mueve un objeto, más masa "alcanza" (en forma de energía); La función que determina dicho límite en la velocidad es la siguiente:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Donde:

**m la masa de 1 objeto en movimiento**
**$m_0$ es la masa del objeto en reposo**
**v velocidad del objeto**
**c velocidad de la luz**

En base a esta ecuación sea x=v/c y sea y=m/$m_0$ Analicemos la siguiente gráfica: $y=((1-v/c)(1+v/c))^{-1/2}$




Este gráfico muestra la razón de las masas en función de la razón de las velocidades de la ecuación de la masa de un objeto en movimiento de Einstein. Con esta gráfica podemos ver que conforme el radio de las velocidades se aproxima a 1 (esto es cuando la velocidad del objeto se acerca a la velocidad de la luz), el radio de las masas se incrementa rápidamente, de manera tal que se tiene una asíntota vertical formando una asíntota vertical en x=v/c=1. Lo que nos dice que justamente el límite de la velocidad de un objeto en movimiento es la velocidad de la luz. Analicemos algunos ejemplos con la siguiente gráfica:

| $\frac{v}{c}$ | $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ | $\frac{m}{m_0}$ |
|---|---|---|
| 0.99 | 0.1411 | 7.089 |
| 0.999 | 0.0447 | 22.37 |
| 0.9999 | 0.0141 | 70.71 |

Entonces, de acuerdo a la tabla si un objeto con una masa de 100Kg está viajando a una velocidad 0.9999c, su masa en movimiento llega a ser de 7071Kg. Dado que no hay objetos que tengan una masa infinita, nosotros concluímos que ningún objeto puede viajar a la velocidad de la luz o a una velocidad mayor (Herman E, et al, 2020).

**La integral es el límite de la suma de Riemann**

## Sumas de Riemann

- Si hacemos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, una partición del segmento $a \leq x \leq b$, y $\Delta x_j = x_{j+1} - x_j$, entonces

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)\Delta x_k = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x_{k-1}$$

- A esta expresión se le conoce como sumas de Riemann.

Este apartado no será explicado a detalle, pero podrías tener una buena explicación introductoria en el video “Introducción a la integral de Riemann”, del canal “Gauss Online”. Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=0vQQKd_vivA

Igualmente para terminar se te recomienda revisar el video “Grandes temas de la matemática: Capítulo 10: Noción del límite”, del canal “TECtv La Señal de la Ciencia”. Disponible en https://www.youtube.com/watch?v=eCB_Jr_VKyg