Integrais duplos em regiões não retangulares

Integrais iterados com limites de integração não constantes

$$\int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right] dx$$

$$\int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx \right] dy$$

EXEMPLO 1

Calcule

a) $\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{y^3}{3} x \right]_{-x}^{x^2} dx = \int_0^1 \left[\frac{(x^2)^3}{3} x - \frac{(-x)^3}{3} x \right] dx$

$= \int_0^1 \left[\frac{x^7}{3} + \frac{x^4}{3} \right] dx = \frac{x^8}{24} + \frac{x^5}{15} \Big]_0^1 = \frac{1}{24} + \frac{1}{15} = \frac{15+24}{360} = \frac{39}{360} = \frac{13}{120}$ //

b) $\int_0^{\pi/3} \int_0^{\cos y} x \operatorname{sen} y\,dx\,dy = \int_0^{\pi/3} \frac{x^2}{2} \operatorname{sen} y \Big]_0^{\cos y} dy = \int_0^{\pi/3} \frac{\cos^2 y}{2} \operatorname{sen} y\,dy$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} \cos^2 y \cdot \operatorname{sen} y \left(-\frac{1}{\operatorname{sen} y} \right) dy = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} -\cos^2 y\,dy$; $u = \cos y$, $du = dx$

$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/3} -u^2\,du = \frac{1}{2} \frac{t^3}{3} \Big]_0^{\pi/3} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\cos^3 y}{3} \right) \Big]_0^{t} = -\frac{\cos^3 y}{6} \Big]_0^{\pi/3} = -\left[\frac{\cos^3(\frac{\pi}{3})}{6} - \left(\frac{\cos^3 0}{6} \right) \right]$

$= \frac{(\frac{1}{2})^3}{6} - \frac{(-1)^3}{6} = -\frac{\frac{1}{8}}{6} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{48} + \frac{1}{6} = \frac{-6+48}{288} = \frac{42}{288} = \frac{7}{48}$ //

/ /

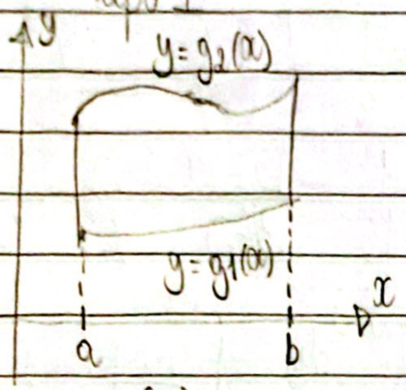
Integrais duplas em regiões não retangulares

14.2.1 Definição

(a) Uma região do tipo I é limitada à esquerda e à direita por retas verticais $x=a$ e $x=b$ e é limitada abaixo e acima por curvas contínuas $y=g_1(x)$ e $y=g_2(x)$, onde $g_1(x) \leq g_2(x)$ com $a \leq x \leq b$.

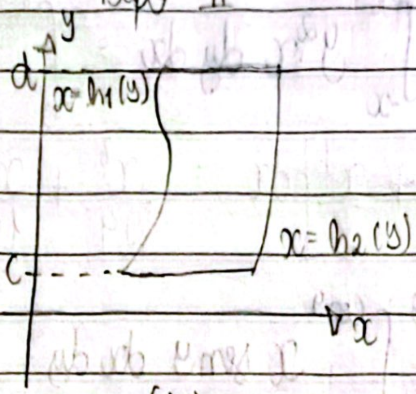
(b) Uma região do tipo II é limitada abaixo e acima por retas horizontais $y=c$ e $y=d$ e é limitada à direita e à esquerda por curvas contínuas $x=h_1(y)$ e $x=h_2(y)$, que satisfazem $h_1(y) \leq h_2(y)$ com $c \leq y \leq d$.

Tipo I



(a)

Tipo II



(b)

O teorema nos permite calcular integrais duplas em regiões do tipo I e II usando integrais iteradas.

14.2.2 Teorema

(a) Se R for uma região do tipo I na qual $f(x,y)$ é contínua, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

(b) Se R for uma região do tipo II na qual $f(x,y)$ é contínua, então

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

EXEMPLO 2

Cada uma das integrais iteradas no EXEMPLO 1 é igual a uma integral dupla em uma região R. Em cada caso, identifique a região R.

Pelo teorema 14.2.2, a integral no Exemplo 1(a) é a integral dupla da função $f(x,y) = y^2x$ na região R do tipo I delimitada lateralmente pelas retas verticais $x=0$ e $x=1$ e acima e abaixo pelas retas horizontais $y=0$ e $y=\pi/3$ e lateralmente pelas curvas $x=0$ e $x=\cos y$.

Determinação dos limites de integração para o cálculo de integrais duplas.

Determinação dos Limites de Integração: Região do tipo I

Passo 1: Como x é mantido fixo para a primeira integração, traçamos uma reta vertical através da região R em um ponto x arbitrário fixado. Essa reta cruza a fronteira de R duas vezes. O ponto inferior da interseção está na curva $y=g_1(x)$, e o ponto superior está na curva $y=g_2(x)$. Essas duas interseções determinam os limites de integração inferior e superior de y na fórmula.

Passo 2: Imagine que a reta traçada no Passo 1 se mova primeiro para a esquerda e depois para a direita. A posição extrema à esquerda na qual a reta intersecta a região R é $x=a$, e a posição extrema à direita na qual a reta intersecta a região R é $x=b$. Assim, obtemos os limites de integração de x na fórmula.

EXEMPLO 3

Calcule $\iint_R xy\, dA$ na região R compreendida pelas curvas $y = \frac{1}{2}x$, $y = \sqrt{x}$, $x = 2$ e $x = 4$.

$$\int_2^4 \int_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} xy\, dy\, dx = \int_2^4 \frac{xy^2}{2}\Big]_{\frac{1}{2}x}^{\sqrt{x}} dx = \int_2^4 \left[\frac{x(\sqrt{x})^2}{2} - \frac{x(\frac{1}{2}x)^2}{2}\right] dx$$

$$\int_2^4 \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{8}\right) dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{32}\Big]_2^4 = \left[\left(\frac{4^3}{6} - \frac{4^4}{32}\right) - \left(\frac{2^3}{6} - \frac{2^4}{32}\right)\right]$$

$$= \frac{64}{6} - \frac{256}{32} - \frac{8}{6} + \frac{16}{32} = \frac{2048 - 1536 - 256 + 96}{192} = \frac{352^{\div 32}}{192_{\div 32}} = \frac{11}{6}$$

Determinação dos Limites de Integração: Região do Tipo II

Passo 1: Como y é mantido fixo para a primeira integração, traçamos uma reta horizontal através da região R pelo ponto fixo y. Essa reta corta a fronteira de R duas vezes. O ponto de interseção mais à esquerda está na curva $x = h_1(y)$, e o ponto mais à direita está na curva $x = h_2(y)$. Essas interseções determinam os limites de integração de x na fórmula.

Passo 2: Imagine que a reta traçada no Passo 1 se mova primeiro para baixo e depois para cima. A posição mais baixa na qual a reta intersecta a região R é $y = c$, e a posição mais alta na qual a reta intersecta a região R é $y = d$. Obtemos, assim, os limites de integração de y na fórmula.