Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 24 - área encerrada por dos o más funciones parte 1 de 2

1. Sean las funciones $f(x)=x^2-2x$ **y** $g(x)=-x^2+4x$ **.**

a) Representa las gráficas de ambas funciones, sobre los mismos ejes.

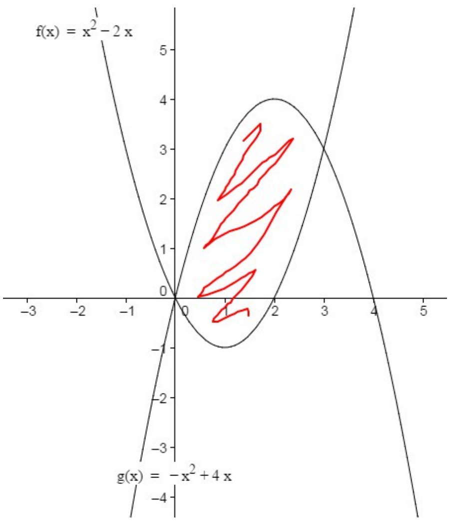
b) Calcula el área total del recinto limitado por ambas gráficas.

a) El mínimo relativo de $f(x)=x^2-2x$ podemos obtenerlos derivando e igualando a 0. Es decir: $f'(x)=2x-2$, $f'(x)=0 \rightarrow 2x-2=0 \rightarrow x=1 \rightarrow Vértice(1,-1)$.

Los puntos de corte con el eje OX podemos obtenerlo igualando a 0 la función. Es decir: $f(x)=x^2-2x$, $f(x)=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow Corte\ eje\ OX\ en\ (0,0)\ y\ (2,0)$.

El mínimo relativo de $g(x)=-x^2+4x$ podemos obtenerlos derivando e igualando a 0. Es decir: $g'(x)=-2x+4$, $g'(x)=0 \rightarrow -2x+4=0 \rightarrow x=2 \rightarrow Vértice(2,4)$.
Los puntos de corte con el eje OX podemos obtenerlo igualando a 0 la función. Es decir: $g(x)=-x^2+4x$, $g(x)=0 \rightarrow -x^2+4x=0 \rightarrow Corte\ eje\ OX\ en\ (0,0)\ y\ (4,0)$.

Con estos puntos tenemos información suficiente para pintar las gráficas (lo hago con Geogebra).



b) Obtenemos los puntos de corte de ambas gráficas.

$f(x)=g(x) \rightarrow x^2-2x=-x^2+4x \rightarrow 2x^2-6x=0 \rightarrow x(2x-6)=0$

Encontramos dos puntos de corte: $x=0$, $x=3$.

De la representación del apartado ***a)*** comprobamos que la gráfica de $g(x)$ permanece por encima de la gráfica de $f(x)$ en el intervalo $[0,3]$. Por lo tanto el área encerrada resulta:

$$A=\int_0^3 (g(x)-f(x))dx=\int_0^3 (-x^2+4x-x^2+2x)dx=\int_0^3 (-2x^2+6x)dx$$

$$A=\left[\frac{-2x^3}{3}+3x^2\right]_0^3=\frac{-2\cdot 27}{3}+3\cdot 9-0=\frac{-54}{3}+27=9\quad u^2$$

2. Considere la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$.

a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

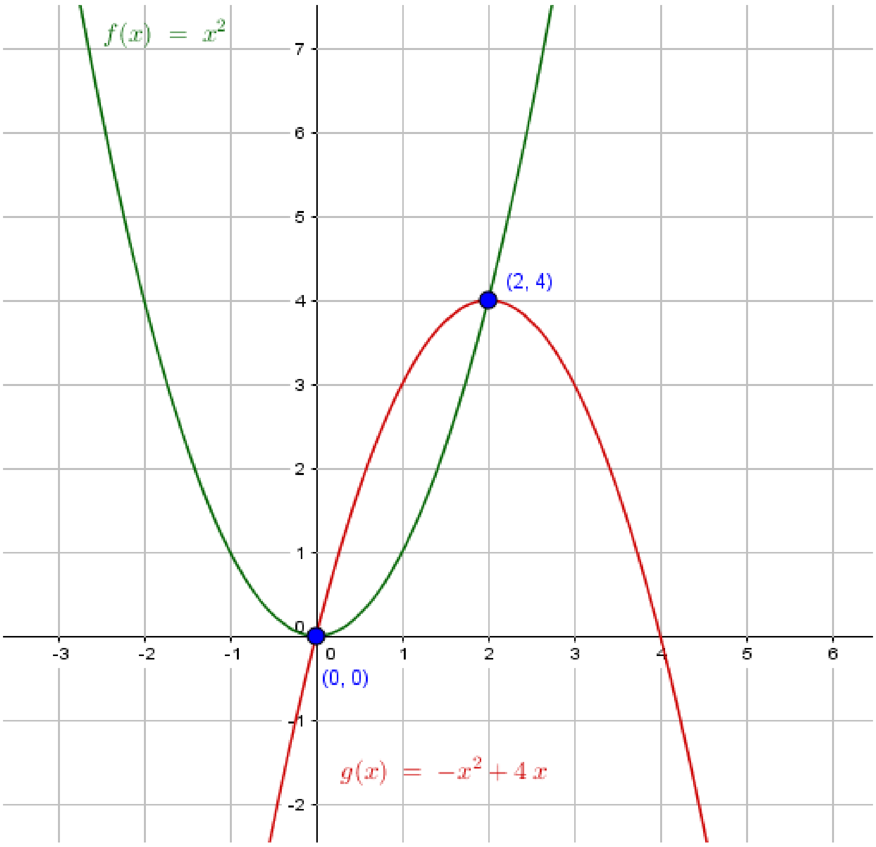
b) Expresa el área como una integral.

c) Calcula el área.

a) La gráfica de la función $y=x^2$ es bien conocida. Es convexa en toda la recta real, con un mínimo relativo y absoluto en el origen de coordenadas.

La gráfica de $y=-x^2+4x$ es cóncava hacia abajo en toda la recta real. Sus puntos de corte con el eje horizontal son $-x^2+4x=0 \rightarrow x=0$, $x=4 \rightarrow (0,0)$, $(4,0)$. Su máximo relativo y absoluto aparece en $y'=0 \rightarrow -2x+4=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2,4)$.

Los cortes entre ambas curvas los obtenemos igualando sus ecuaciones → $x^2=-x^2+4x \rightarrow x=0$, $x=2$.



b) El área encerrada por ambas curvas será igual a la integral definida entre los límites de integración $x=0$ y $x=2$, de la curva superior menos la curva inferior. Es decir.

$$A=\int_0^2 [(-x^2+4x)-(x^2)]dx=\int_0^2(-2x^2+4x)dx$$

c) $A=\int_0^2 (-2x^2+4x)dx=-2\int_0^2 x^2 dx+4\int_0^2 x\,d\,x=-2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

Que resolvemos aplicando la regla de Barrow → $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de la función $f(x)$.

$$A=-2\left[\frac{8}{3}-0\right]+4\left[\frac{4}{2}-0\right]=\frac{-16}{3}+8=\frac{8}{3}u^2$$

3. Considera las funciones $f(x):(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\ln(x+2)$ **y** $g(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **definida por** $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ **.**

a) Esboza el recinto que determinan la gráfica de f **, la gráfica de** g **, la recta** $x=1$ **y la recta** $x=3$ **. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).**

b) Determina el área del recinto anterior.

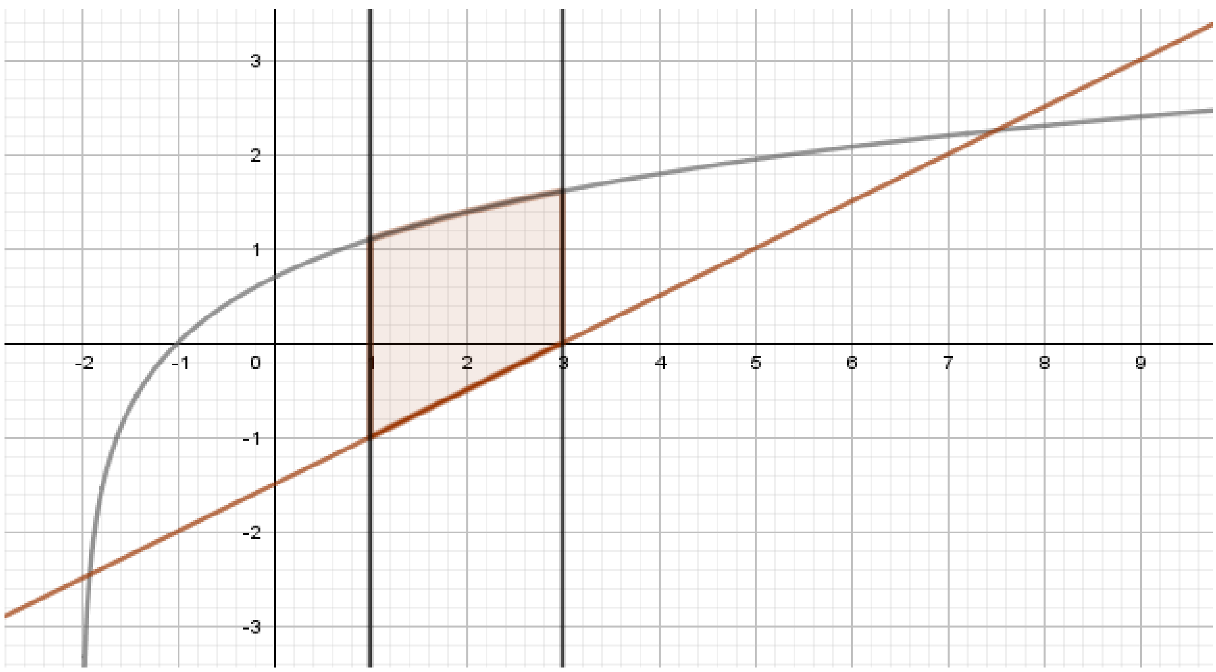
a) La gráfica de $\ln(x)$ es bien conocida, por lo que $f(x)=\ln(x+2)$ implica desplazar horizontalmente a la izquierda la curva de $\ln(x)$.

Para dibujar la recta, nos bastan dos puntos:

$$x=0 \quad \rightarrow \quad g(0)=\frac{-3}{2}$$

$$x=3 \quad \rightarrow \quad g(3)=0$$

No nos piden los puntos de corte de las funciones entre sí, por lo que el boceto resulta:



b) El área encerrada por ambas gráficas en el intervalo $[1,3]$ será la integral definida entre la función superior menos la función inferior del boceto del apartado anterior:

$$Área=\int_1^3 \left(\ln(x+2)-\frac{1}{2}(x-3)\right)dx$$

Resolvemos en primer lugar la integral indefinida, y luego aplicamos los límites de integración.

$$I=\int \ln(x+2)\,dx-\frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{3}{2}\int dx=\int \ln(x+2)\,dx-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$$

La integral del logaritmo la resolvemos aplicando partes:

$$u(x)=\ln(x+2) \quad \rightarrow \quad u'=\frac{1}{x+2}$$

$$v'(x)=1 \quad \rightarrow \quad v=x$$

$$\int \ln(x+2)\,dx=x\ln|x+2|-\int \frac{x}{x+2}\,dx$$

Realizamos cociente de polinomios en la integral que nos queda, o bien razonamos:

$$\int \frac{x}{x+2}\,dx=\int \frac{x+2-2}{x+2}\,dx=\int \frac{x+2}{x+2}\,dx-\int \frac{2}{x+2}\,dx=x-2\ln|x+2|$$

Por lo tanto:

$$\int \ln(x+2)\,dx=x\ln|x+2|-x+2\ln|x+2|$$

Y la integral indefinida resulta:

$$I=x\ln|x+2|-x+2\ln|x+2|-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+C$$

Para obtener el área aplicamos la regla de Barrow:

$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ primitiva de $f(x)$

$$Área=\left[x\ln|x+2|-x+2\ln|x+2|-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right]_1^3$$

$$Área=3\ln(5)-3+2\ln(5)-\frac{1}{4}\cdot 9+\frac{3}{2}\cdot 3-\left(\ln(3)-1+2\ln(3)-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$$

$$Área=5\ln(5)-3+\frac{9}{4}-\left(3\ln(3)-1+\frac{5}{4}\right)=5\ln(5)-3\ln(3)-2+\frac{4}{4}=5\ln(5)-3\ln(3)-1\simeq 3{,}75\ u^2$$

4. Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=2-x$ **y** $g(x)=\frac{2}{x+1}$ **.**

Obtenemos puntos de corte de ambas gráficas → $2-x=\frac{2}{x+1}$ → $-x^2+x=0$ → $x=0$, $x=1$

Con un sencillo esbozo podemos decidir qué función está por encima de la otra en el intervalo $[0,1]$. O bien darnos cuenta que $g(x)=\frac{2}{x+1}$ es una función convexa y estrictamente decreciente para $x>-1$, mientras que la recta $f(x)=2-x$ es estrictamente decreciente en toda la recta real. Por lo que la recta permanece por encima de la hipérbola en $[0,1]$. El área encerrada será igual a:

$$\acute{A}rea=\int_0^1 (2-x-\frac{2}{x+1})\,dx=[2x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x+1|]_0^1=2-\frac{1}{2}-2\ln(2)=\frac{3}{2}-2\ln(2)\ u^2$$

5. Calcula el área limitada por $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ **, el eje** OX **y las rectas** $x=0$ **y** $x=\ln(5)$ **.**

Si la función se encuentra **por encima del eje horizontal** el **área** encerrada será igual a la **integral definida** de la función entre los límites de integración.

Recuerda que si la función se encuentra **por debajo del eje horizontal**, el **área** se define como el **valor absoluto de esa integral definida**. Es decir, **una integral definida puede dar como resultado un valor negativo... pero un área siempre debe ser positiva**, y por eso aplicamos valor absoluto en este segundo caso.

La función $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ nunca corta al eje horizontal, ya que $e^x=0$ no admite solución. Además $f(0)$ y $f(\ln(5))$ son valores positivos, por lo que la curva e encuentra por encima del eje horizontal.

$$Área=\int_0^{\ln(5)}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=[\frac{-1}{1+e^x}]_0^{\ln(5)}=[\frac{-1}{1+e^{\ln(5)}}+\frac{1}{2}]=\frac{-1}{1+5}+\frac{1}{2}=\frac{-1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{1}{3}\simeq 0{,}33\ \ u^2$$

Donde hemos recordado la derivada de la función inversa $\frac{d}{dx}[\frac{1}{f(x)}]=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ y hemos aplicado la regla de Barrow.

6. Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\ln(x)$.

a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.

b) Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de la función, la recta $y=x-1$ y la recta $x=3$. Calcula su área.

a) La recta tangente a la función en $x=1$ tendrá pendiente igual a la derivada evaluada en dicho punto.

$$f'(x)=\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f'(1)=1$$

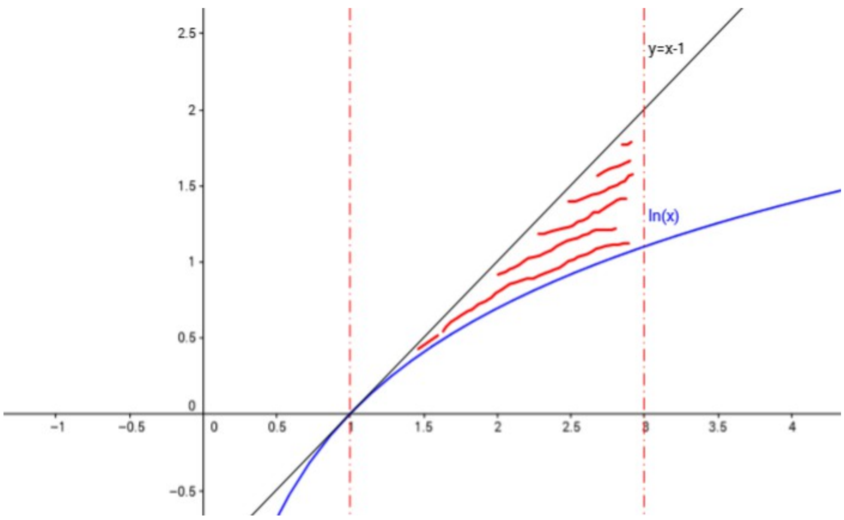
La imagen de $x=1 \rightarrow f(1)=\ln(1)=0 \rightarrow (1,0)$

Ecuación punto-pendiente de la recta → $m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 1=\frac{y-0}{x-1} \rightarrow y=x-1$

b) Nos piden obtener el recinto generado por la recta tangente calculada en el apartado anterior $y=x-1$, la función $f(x)=\ln(x)$ y la recta vertical $x=3$.

Si en $x=1$ la recta es tangente a la función, ya tendremos un punto de intersección entre ambas curvas.

Sabemos que la gráfica del logaritmo es estrictamente creciente y cóncava hacia abajo en su dominio de definición, por lo que si $y=x-1$ es tangente a la función en $x=1$, siempre permanece por encima de $f(x)=\ln(x)$. De esta forma el área encerrada será:



El área encerrada coincide con la siguiente integral definida:

$$A=\int_1^3 (x-1-\ln(x))\,dx$$

Primero resuelvo la integral indefinida.

$$I=\int (x-1-\ln(x))\,dx=\frac{x^2}{2}-x-\int \ln(x)\,dx$$

Aplicamos partes para resolver la integral del logaritmo.

$$\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$
$$u(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'(x)=\frac{1}{x}$$
$$v'(x)=1 \quad \rightarrow \quad v(x)=x$$
$$\int \ln(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx=x\ln(x)-\int dx=x\ln(x)-x$$
$$I=\frac{x^2}{2}-x-x\ln(x)+x+C=\frac{x^2}{2}-x\ln(x)+C$$

Para resolver la integral definida aplicamos la regla de Barrow → $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ → donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

$$A=\int_1^3 (x-1-\ln(x))\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-x\ln(x)\right]_1^3=\frac{9}{2}-3\ln(3)-\frac{1}{2}+\ln(1)=4-3\ln(3)\simeq 0{,}704 \quad u^2$$

7. Calcular el área de la región delimitada en el primer cuadrante por la gráfica de la función $g(x)=x^3$ y la recta $y=4x$.

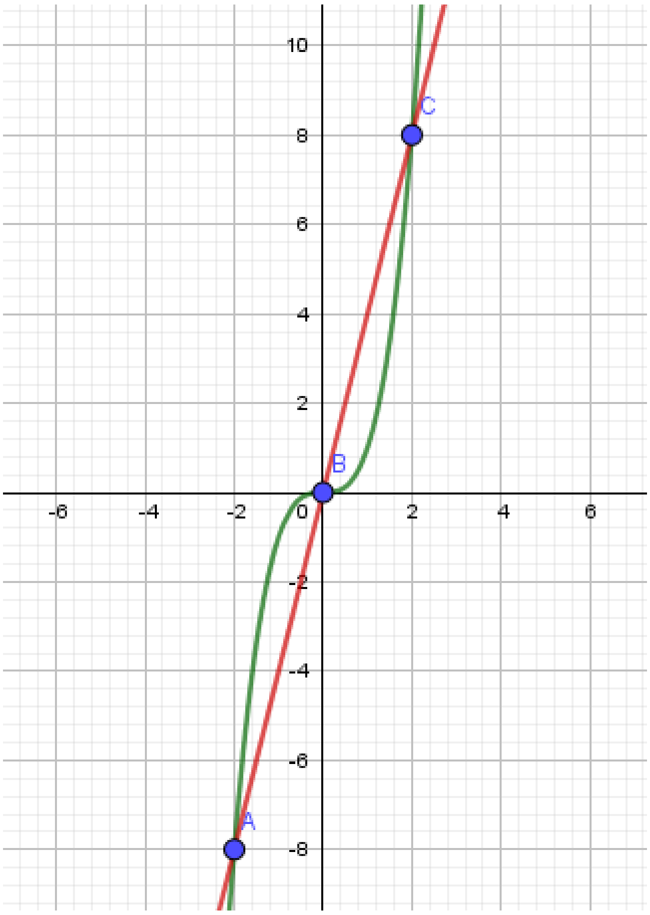
La función $g(x)=x^3$ es bien conocida. Estrictamente creciente en todo su dominio, y con un punto de inflexión en $x=0$.

La recta $y=4x$ también es creciente en su dominio y pasa por el $(0,0)$.

Los puntos de corte entre ambas funciones se obtienen igualando sus ecuaciones.

$$x^3=4x \quad \rightarrow \quad x^3-4x=0$$

$$x=-2 \quad , \quad x=0 \quad , \quad x=2$$



Con un sencillo boceto de sus gráficas, comprobamos que $g(x)=x^3$ está por encima de la recta en el intervalo $(-2,0)$ y por debajo de la recta en el intervalo $(0,2)$.

El área que nos pide el enunciado, en el primer cuadrante, se calcula con la siguiente integral definida:

$$Área=\int_0^2 (y-g(x))\,dx$$

$$Área=\int_0^2 (4x-x^3)\,dx$$

$$Área=4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2-\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2=2[x^2]_0^2-\frac{1}{4}[x^4]_0^2$$

$$Área=2[4-0]-\frac{1}{4}[16-0]=8-4=4u^2$$

Donde hemos aplicado la regla de Barrow al resolver la integral definida:

$\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$ → siendo $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.