Problemas – Tema 5

Problemas resueltos - 5 - cociente de polinomios con raíces simples

1. Calcula la siguiente integral en función de a **y** b **.** $I=\int \frac{a\,x+b}{x^2-3\,x+2}dx$

$$I=\int \frac{a\,x+b}{x^2-3\,x+2}dx=\int \frac{a\,x+b}{(x-1)(x-2)}dx$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados, al ser el grado del numerador menor que el grado del denominador y contar con dos raíces simples en el denominador.

$$\frac{a\,x+b}{(x-1)(x-2)}=\frac{C}{x-1}+\frac{D}{x-2}$$

$$a\,x+b=C(x-2)+D(x-1)$$

$$si\quad x=1 \quad\rightarrow\quad a+b=-C \quad\rightarrow\quad -(a+b)=C$$

$$si\quad x=2 \quad\rightarrow\quad 2\,a+b=D$$

Es decir, podemos expresar la integral de la forma:

$$I=\int \frac{a\,x+b}{(x-1)(x-2)}dx=\int \frac{-(a+b)}{x-1}dx+\int \frac{2\,a+b}{x-2}dx=-(a+b)\ln|x-1|+(2\,a+b)\ln|x-2|+cte$$

Donde aplicamos valor absoluto al argumento de los logaritmos para garantizar que sean positivos.

2. Calcule la siguiente integral indefinida: $\int \frac{x}{x^2+x-6}dx$

El grado del numerador es inferior al grado del denominador.

Obtenemos las raíces del denominador → $x^2+x-6=0 \rightarrow x=2 \ , \ x=-3$ → Dos raíces simples

Aplicamos método de coeficientes indeterminados.

$\frac{x}{x^2+x-6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+3}$ → Hacemos m.c.m. e igulamos numeradores

$x=A(x+3)+B(x-2)$

Si $x=-3 \rightarrow -3=A\cdot 0+B(-5) \rightarrow B=\frac{3}{5}$

Si $x=2 \rightarrow 2=A(5)+B\cdot 0 \rightarrow A=\frac{2}{5}$

Llevamos estos resultados a la integral.

$$\int \frac{x}{x^2+x-6}dx=A\int \frac{1}{x-2}dx+B\int \frac{1}{x+3}dx=\frac{2}{5}\ln|x-2|+\frac{3}{5}\ln|x+3|+C$$

3. Resuelve $I=\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x^2+x-2)}\,dx$

$$I=\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x^2+x-2)}\,dx=\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)}\,dx$$ → método de coeficientes indeterminados

$$\frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x+2)}$$ → tres raíces simples en el denominador

$$2x^2+5x-1=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

$$Si\ \ x=0\rightarrow -1=-2A\rightarrow \quad A=\frac{1}{2}$$

$$Si\ \ x=1\rightarrow 6=3B\rightarrow \quad B=2$$

$$Si\ \ x=-2\rightarrow -3=6C\rightarrow \quad C=\frac{-1}{2}$$

$$I=\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)}dx=\int \frac{1}{2x}dx+\int \frac{2}{(x-1)}dx+\int \frac{-1}{2(x+2)}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx+2\int \frac{1}{(x-1)}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\ln|x|+2\ln|x-1|-\frac{1}{2}\ln|x+2|+C$$

4. Resuelve $I=\int \frac{10}{x^2-x-6}dx$

$$I=\int \frac{10}{x^2-x-6}dx=10\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}dx$$

Por el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3} \quad \rightarrow \quad 1=A(x-3)+B(x+2)$$

Si $x=-2 \quad \rightarrow \quad B=\frac{-1}{5}$

Si $x=3 \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{5}$

Por lo tanto:

$$I=10\int \frac{\frac{1}{5}}{x-3}dx-10\int \frac{\frac{1}{5}}{x+2}=2\ln|x-3|-2\ln|x+2|+C=2\ln|\frac{x-3}{x+2}|+C$$