Problemas – Tema 9

Problemas resueltos - 9 - condiciones suficientes sobre puntos de inflexión

1. Calcula la curvatura y los puntos de inflexión de $f(x)=x\cdot e^{\frac{-x}{2}}$

El dominio de la función es la recta real, por ser producto de funciones con dominio toda la recta real (polinomio y exponencial).

La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero.

$$f'(x)=e^{\frac{-x}{2}}+x\cdot e^{\frac{-x}{2}}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)$$

$$f''(x)=e^{\frac{-x}{2}}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)+\left(\frac{-1}{2}\right)\left[e^{\frac{-x}{2}}+x\cdot e^{\frac{-x}{2}}\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\right]=\frac{-1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\left[2-\frac{x}{2}\right]$$

$$f''(x)=0 \quad\rightarrow\quad \frac{-1}{2}e^{\frac{-x}{2}}\left[2-\frac{x}{2}\right]=0$$

Como la exponencial nunca se anula, igualamos a 0 el interior del corchete.

$2-\frac{x}{2}=0 \quad\rightarrow\quad x=4$ → candidato a punto de inflexión

En la recta real evaluamos la segunda derivada en los intervalo formados por el punto candidato a punto de inflexión y por los puntos que no pertenecen al dominio.

$(-\infty,4) \quad\rightarrow\quad f''(-10)<0$ → función cóncava

$(4,\infty) \quad\rightarrow\quad f''(10)>0$ → función convexa

Por lo tanto, $x=4$ es un punto de inflexión. Su imagen:

$$f(4)=4\cdot e^{\frac{-4}{2}}=4\cdot e^{-2}=4/e^{2}$$

2. Sea la función $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x)=e^x(x^2-x+1)$. Halla las abscisas de los puntos de inflexión

El dominio de la función es toda la recta real. Los candidatos a puntos de inflexión se obtienen de igualar la segunda derivada a cero.

$$f'(x)=e^x(x^2-x+1)+e^x(2x-1) \rightarrow f'(x)=e^x(x^2+x)$$

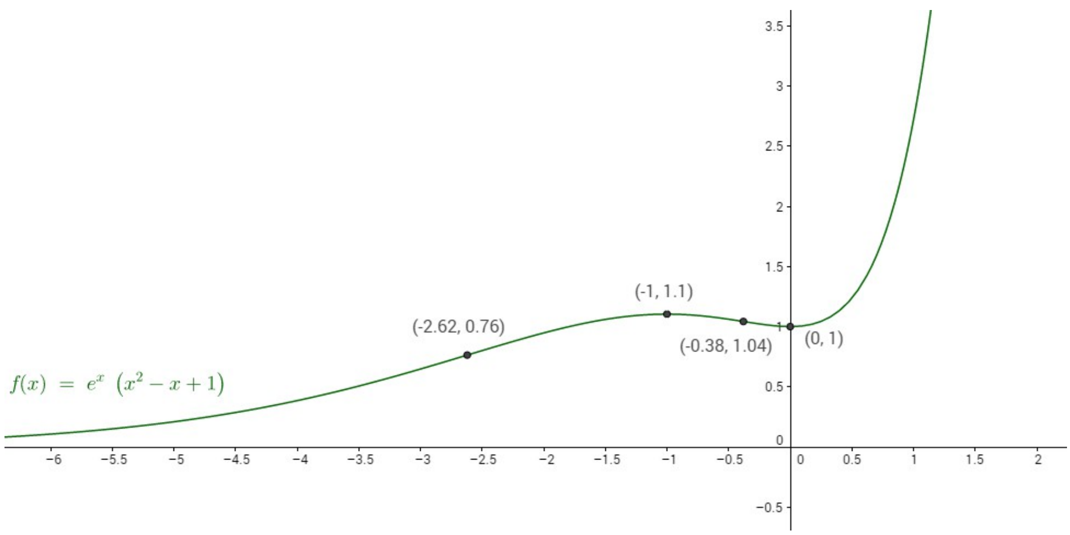
$$f''(x)=e^x(x^2+x)+e^x(2x+1) \rightarrow f''(x)=e^x(x^2+3x+1)$$

$$f''(x)=0 \rightarrow x^2+3x+1=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{5}}{2}$$

Donde nuevamente recordamos que la exponencial nunca se anula.

Para confirmar que estamos ante puntos de inflexión, podemos evaluar la tercera derivada en los puntos candidatos. Y si la tercera derivada resulta distinta de cero, confirmaremos su existencia. O bien (puede ser más sencillo), determinar la curvatura a ambos lados de estos puntos y comprobar que aparece cambio en dicha curvatura a izquierda y a derecha de cada candidato a punto de inflexión.

Función $f(x)$	$f(x)\cup$	$f(x)\cap$	$f(x)\cup$
Intervalos	$(-\infty,\frac{-3-\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-3-\sqrt{5}}{2},\frac{-3+\sqrt{5}}{2})$	$(\frac{-3+\sqrt{5}}{2},\infty)$
Segunda Derivada $f''(x)$	$f''(-10)>0$	$f''(-1)<0$	$f'(0)>0$



3. Sea la función $f:[-2,2]\rightarrow\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=x^3-2x+5$ **.**

Determina la ecuación de la recta tangente y de la recta normal a la gráfica de la función en el punto de inflexión.

La condición necesaria de punto de inflexión nos pide anular la segunda derivada.

$$f'(x)=3x^2-2 \rightarrow f''(x)=6x \rightarrow f''(x)=0 \rightarrow 6x=0 \rightarrow x=0$$

Para demostrar que el candidato a punto de inflexión, efectivamente es un punto de inflexión, aplicamos la condición suficiente. Por ejemplo, calculando la tercera derivada.

$$f'''(x)=6$$

Evaluamos la tercera derivada en el candidato a punto de inflexión, y vemos el signo.

$$f'''(0)=6>0$$

En $x=0$ hay punto de inflexión, de cóncavo a convexo.

La imagen del punto de inflexión es:

$$f(0)=0^3-2\cdot 0+5=5$$

Por lo que debemos escribir la ecuación punto-pendiente de la recta tangente a la función en el punto de tangencia $(0,5)$.

$f'(0)=\frac{y-5}{x-0}$ → La derivada evaluada en $x=0$ es $f'(0)=-2$ → Por lo tanto:

$-2=\frac{y-5}{x-0} \rightarrow -2x=y-5 \rightarrow y=-2x+5$ → Recta tangente

La recta normal es perpendicular a la recta tangente. Por lo tanto, su ecuación punto-pendiente es:

$\frac{-1}{f'(0)}=\frac{y-5}{x-0} \rightarrow \frac{-1}{-2}=\frac{y-5}{x-0} \rightarrow x=2y-10 \rightarrow x-2y+10=0$ → Recta normal