UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA – UDESC
CENTRO DE CIÊNCIAS TECNOLÓGICAS – CCT
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS

PRODUTO EDUCACIONAL

MÁXIMOS E MÍNIMOS: situações-problema com recursos dinâmicos

DIENIFER TAINARA CARDOSO

JOINVILLE, SC
2018

Instituição de Ensino: UNIVERSIDADE DO ESTADO DE SANTA CATARINA
Programa: ENSINO DE CIÊNCIAS, MATEMÁTICA E TECNOLOGIAS
Nível: MESTRADO PROFISSIONAL
Área de Concentração: Ensino de Matemática
Linha de Pesquisa: Tecnologias Educacionais

Título: Máximos e Mínimos: situações-problema com recursos dinâmicos
Autor: Dienifer Tainara Cardoso
Orientador: Ivanete Zuchi Siple
Coorientador: Elisandra Bar de Figueiredo
Data (defesa): 04/07/2018

Produto Educacional: GeoGebraBook
Níveis de ensino: Ensino Médio e Ensino Superior.
Área de Conhecimento: Matemática
Tema: Otimização de Funções Polinomiais, Racionais e Trigonométricas

Descrição do Produto Educacional:
Este Produto Educacional é um Caderno Didático composto por sequências didáticas que visam contribuir com o ensino-aprendizagem de Máximos e Mínimos de Funções Polinomiais, Racionais e Trigonométricas. O caderno aborda vinte e seis aplicativos elaborados no software GeoGebra que podem facilitar a compreensão de conceitos e algumas situações-problema presentes no caderno.

Biblioteca Universitária UDESC: http://www.udesc.br/bibliotecauniversitaria

Publicação Associada: [Resolução de problemas e o software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Otimização de Funções]

URL: http://www.cct.udesc.br

Arquivo	*Descrição	Formato
0025018.pdf	Texto completo	Adobe PDF

Licença de uso: O autor é titular dos direitos autorais dos documentos disponíveis e é vedado, nos termos da lei, a comercialização de qualquer espécie sem sua autorização prévia (Lei nº 12.853, de 2013).

APRESENTAÇÃO

Este Produto Educacional, que chamaremos de Caderno Didático, é resultado da pesquisa intitulada 'Resolução de problemas e o software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Otimização de Funções'[1], realizada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências, Matemática e Tecnologias, sob orientação da Profa. Dra. Ivanete Zuchi Siple e coorientação da Profa. Dra. Elisandra Bar de Figueiredo.

A metodologia de ensino utilizada nesse material é a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014). Assim, desenvolvemos esse caderno para explorar as potencialidades da tecnologia na resolução de problemas.

O caderno visa explorar dinamicamente conceitos de máximos e mínimos, e pode ser utilizado por professores e alunos de nível básico ou superior. Para isso, é composto por sequências didáticas formadas por situações-problema, aplicativos e materiais em PDF para auxiliar o professor. Além disso, um capítulo é destinado para exploração geométrica e dinâmica dos principais conceitos de máximos e mínimos de funções.

Alguns dos aplicativos presentes nesse material foram inspirados em materiais já existentes na comunidade do GeoGebra (DANTAS, 2015; CARDOSO, 2016; YANG, 2016), sendo adaptados para a proposição das atividades.

No Ensino Básico, apoiamos uma abordagem intuitiva do conceito de derivada na exploração de máximos e mínimos utilizando aplicativos desenvolvidos que podem contribuir para isso. No Ensino Superior, abordamos aplicativos que contribuem com uma exploração dinâmica sobre o teste da primeira derivada e o teste da segunda derivada.

O Caderno Didático é um material interativo, no qual o professor e aluno podem explorar conceitos, representações de situações-problema e responder algumas questões online referentes ao conteúdo.

Este material foi desenvolvido utilizando a ferramenta GeoGebraBook, disponibilizada online. Essa ferramenta possibilita que o usuário baixe os aplicativos e arquivos em PDF apresentados no Caderno Didático. Além disso, pode ser utilizado em smartphones.

O caderno é composto por 26 (vinte e seis) aplicativos e 11 (onze) situações-problema. Para dar forma a esse material, foram implementados oito capítulos, conforme segue:

Capítulo 1 – Apresentação

[1] A dissertação pode ser encontrada na página do PPGCMT pelo link https://www.udesc.br/cct/ppgecmt/tcc

Capítulo 2 – Metodologia de Ensino

Capítulo 3 – Exploração geométrica sobre Máximos e Mínimos

Capítulo 4 – Situações-problema de Otimização

Capítulo 5 – Algumas considerações e perspectivas

Capítulo 6 – Manuais e Links

Capítulo 7 – Deixe sua opinião

Capítulo 8 – Referências

Iniciaremos com algumas informações relevantes sobre o material, e em seguida exploraremos a composição dos capítulos.

Algumas características de nosso Produto Educacional foram inspiradas no Produto Educacional produzido por Lemke (2017), tais como a forma de apresentação, os ícones, bem com a organização do respectivo produto.

Esperamos que esse Caderno Didático possa contribuir com o ensino e aprendizagem de Máximos e Mínimos de Funções, além de permitir que o (futuro) professor compreenda a relação desses conceitos estudados no Ensino Superior, com os estudados no Ensino Básico.

Dienifer Tainara Cardoso

Ivanete Zuchi Siple

Elisandra Bar de Figueiredo

SUMÁRIO

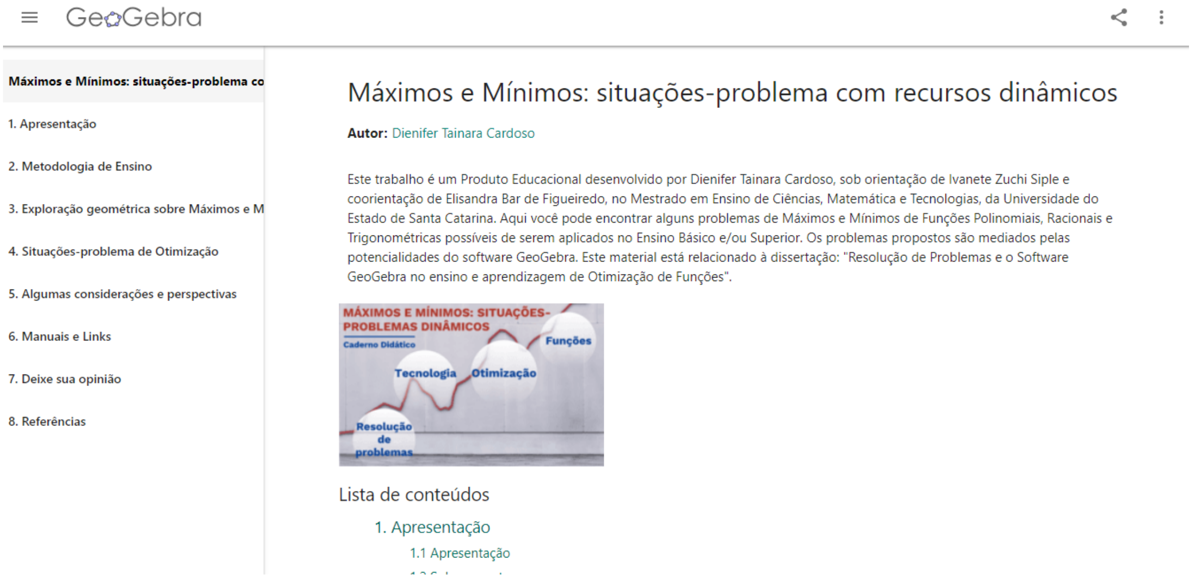
FIGURAS E QUADROS

ALGUMAS INFORMAÇÕES INICIAIS

Página inicial - Acessando os capítulos

Ao acessar nosso Produto Educacional[2] a primeira tela que será visualizada será a página inicial, como ilustra a Figura 1.

Figura 1 – Tela inicial do Produto Educacional Caderno Didático



Fonte: a autora

Explorando a página inicial, você poderá acessar os demais capítulos clicando nos links apresentados em ‘Lista de Conteúdos’, ou ainda, pode acessar os demais capítulos utilizando o menu da lateral esquerda da tela.

Baixar aplicativos do GeoGebraBook

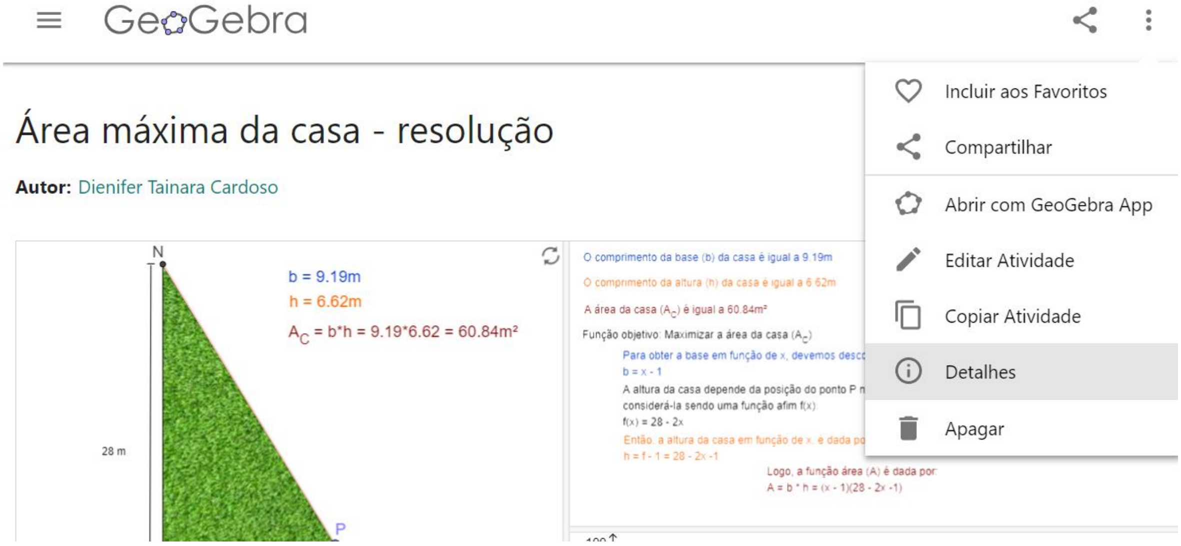
Ao longo do Caderno Didático são disponibilizados links para o usuário acessar e baixar o aplicativo do GeoGebra. Após clicar em um dos links, irá abrir o aplicativo selecionado em outra página.

Vamos utilizar um dos aplicativos do Caderno Didático para exemplificar como baixá-los.

Para baixar um aplicativo, siga as instruções: Vamos considerar o aplicativo do link ‘Área máxima da casa - resolução’. Quando abrir a página clique em ‘Detalhes’, assim como ilustra a Figura 2.

[2] Link do produto: https://ggbm.at/Qe3PeM2d

Figura 2 – Baixando um aplicativo em ‘Detalhes’



Fonte: a autora

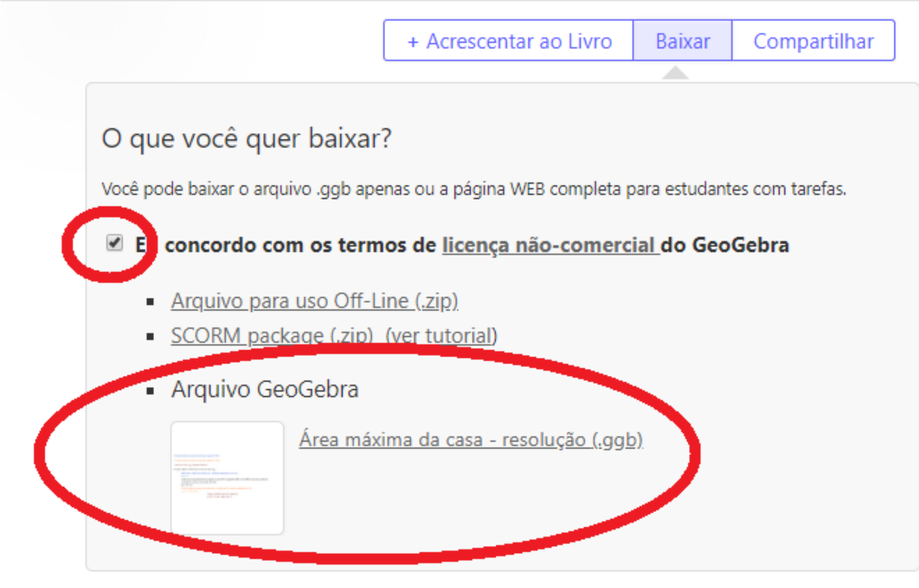
Na página que abrir em sequência, clique em ‘Baixar’, como ilustra a Figura 3.

Figura 3 – Página que apresenta os detalhes do aplicativo e a opção baixar

Fonte: a autora

Em seguida abrirá uma janela, conforme ilustra a Figura 4, basta confirmar que está concordando com os termos e em seguida clicar no arquivo (.ggb) para baixar o aplicativo.

Figura 4 – Baixando aplicativo

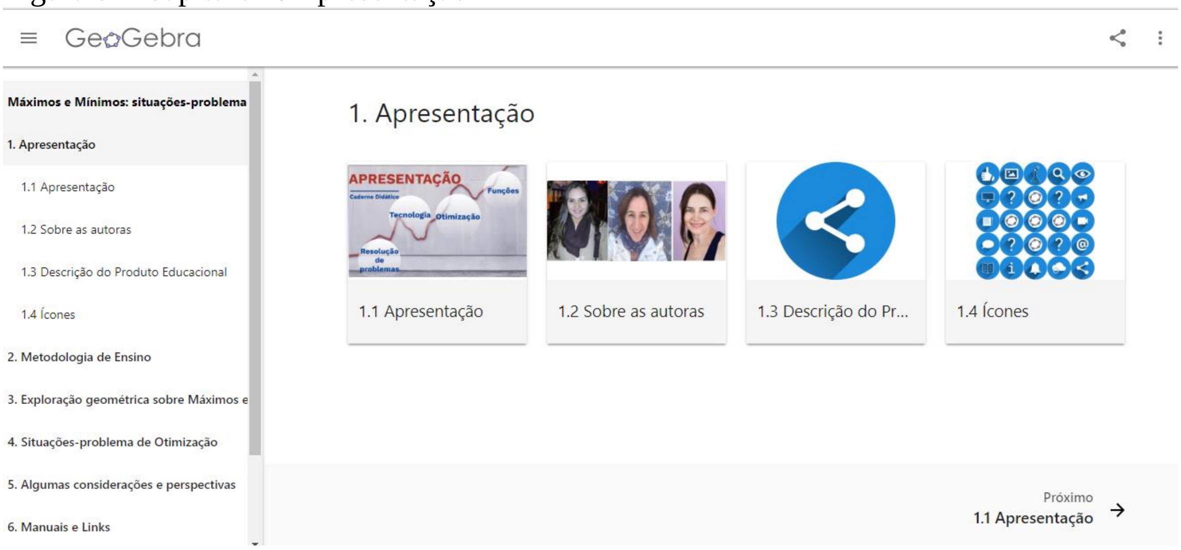


Fonte: a autora

CAPÍTULO 1: APRESENTAÇÃO

O Capítulo 1 aborda uma breve apresentação do Produto Educacional, algumas informações sobre as autoras, a descrição desse em PDF e a explicação sobre os ícones que serão utilizados ao longo do produto. A Figura 5 ilustra o Capítulo 1. O professor/usuário pode seguir a sequência proposta clicando em ‘Next’ na parte inferir direta da página ou clicar no ícone que desejar.

Figura 5 – Capítulo 1: Apresentação



Fonte: a autora

Alguns ícones[3] serão utilizados ao longo do produto como apoio visual na exploração dos capítulos. O Quadro 1 apresenta a descrição de cada ícone.

Quadro 1 – Descrição dos ícones utilizado no produto

Ícone	**Descrição**
	**Objetivos:** Apresenta o objetivo dos problemas e capítulos.
	**Aplicativos do GeoGebra:** Apresenta aplicativos elaborados no GeoGebra que podem ser utilizados durante a resolução do

[3] Esses ícones podem ser retirados do banco de imagens disponível gratuitamente para reutilização em: https://pixabay.com/pt/, no perfil IO-Imagens: https://pixabay.com/pt/users/IO-Images-1096650/. Acesso em: 16 mai. 2018.

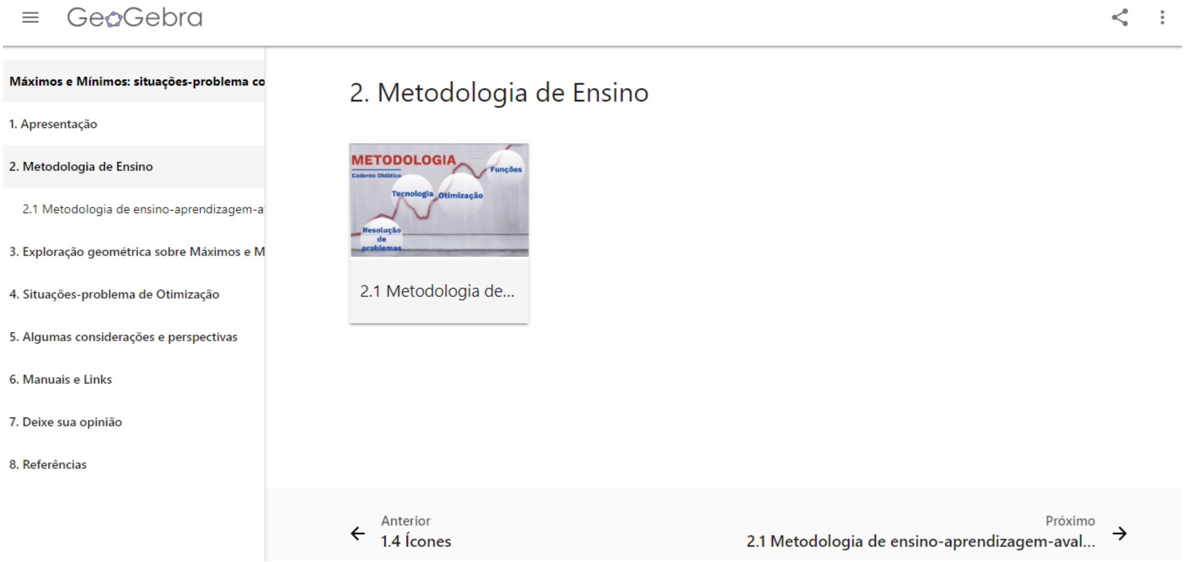
	problema, apresentação de um teste ou teorema, ou apenas a janela de visualização para que o aluno utilize para testar estratégias.
	**Etapas:** Indica um controle deslizante presente em alguns aplicativos para avançar nas etapas de determinado teste ou teorema.
	**Situação-problema:** Descreve a situação-problema referente ao conteúdo de Máximos e Mínimos de Funções.
	**Problema em PDF:** Disponibiliza a situação-problema em PDF para que o professor possa imprimir, se achar conveniente, e utilizar em sala.
	**Materiais para o professor:** Disponibiliza materiais para manuseio do professor, com o objetivo de auxiliá-lo na preparação de sua aula.
	**Pesquisa de opinião:** Espaço para o professor deixar sua opinião e/ou sugestão sobre o Produto Educacional.

Fonte: adaptado de Lemke (2017)

CAPÍTULO 2: METODOLOGIA DE ENSINO

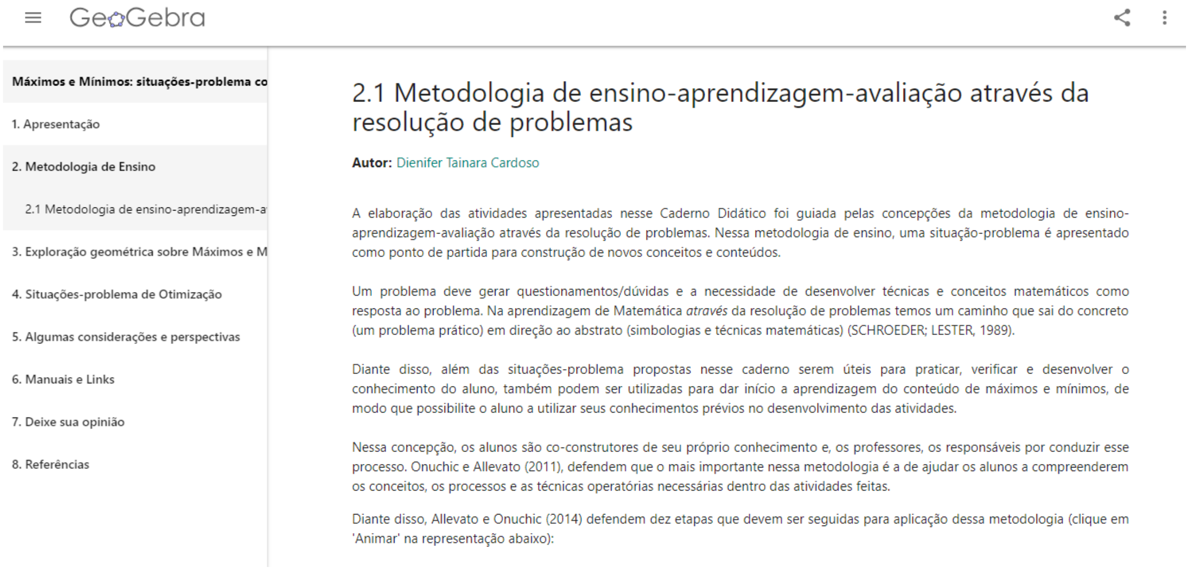
Conhecemos as potencialidades da tecnologia no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, mas acima disso, sabemos a importância em o professor ter domínio sobre o conteúdo que leciona. Sendo assim, nos embasamos na metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014) como a metodologia que pode dar suporte na utilização desse Produto Educacional. A primeira tela desse capítulo apresenta o ícone da metodologia, como ilustrada a Figura 6. Ao clicar nesse ícone, inicialmente será apresentado um breve contexto sobre a metodologia utilizada, como ilustra a Figura 7.

Figura 6 – Capítulo 2: Metodologia de Ensino



Fonte: a autora

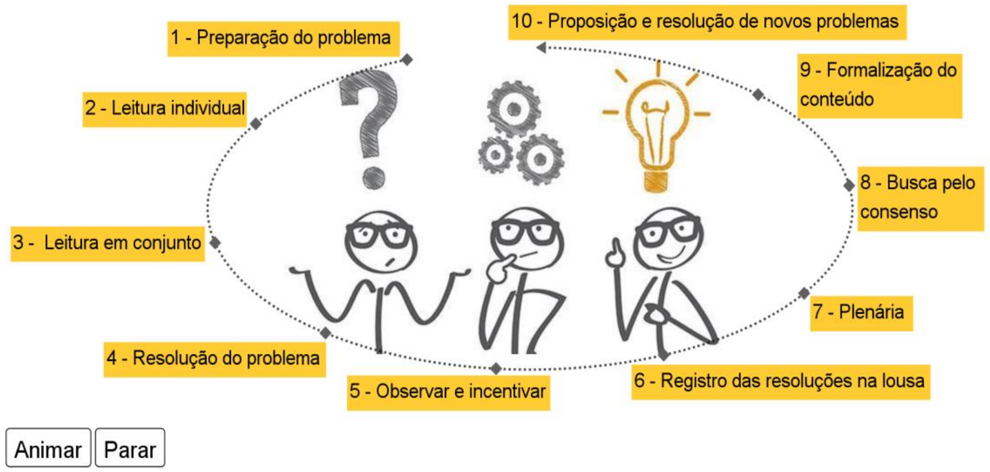
Figura 7 – Breve abordagem sobre a metodologia de ensino



Fonte: a autora

Nessa mesma página ‘Metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas’ ilustrada na Figura 7, utilizamos uma animação para ilustrar as dez etapas dessa metodologia, cuja tela final está apresentada na Figura 8.

Figura 8 – Etapas da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas

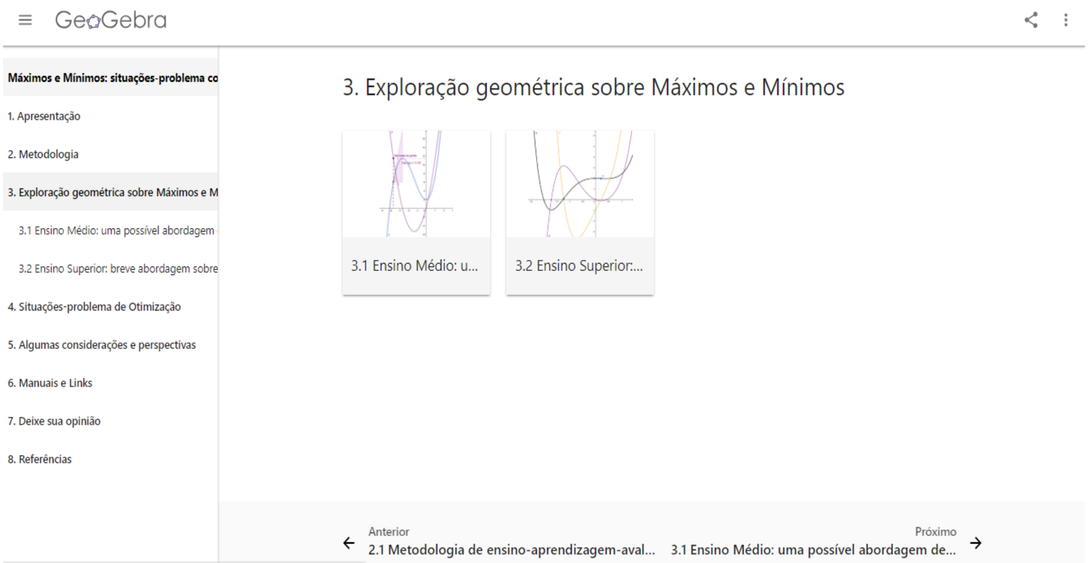


Fonte: a autora

CAPÍTULO 3: EXPLORAÇÃO GEOMÉTRICA SOBRE MÁXIMOS E MÍNIMOS

Esse capítulo apresenta uma abordagem dinâmica sobre Otimização, separado em dois tópicos – um destinado para o Ensino Médio e outro ao Superior. A primeira tela desse capítulo apresenta dois ícones, como ilustrada a Figura 9.

Figura 9 – Tela inicial do Capítulo 3



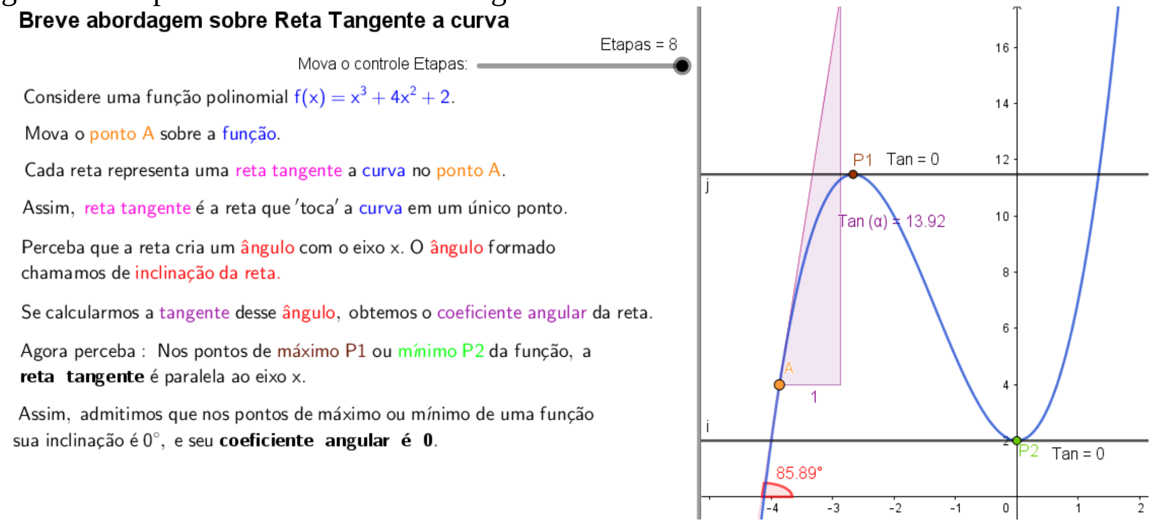
Fonte: a autora

Na sequência descrevemos cada um desses ícones.

3.1 Ensino Médio: uma possível abordagem de Máximos e Mínimos

Aqui apresentamos algumas situações-problema sobre Máximos e Mínimos de funções que podem ser exploradas em conexão com a geometria. Não pretendemos abordar algebricamente o conceito da derivada envolvida nessas situações, mas sim possibilitar ao aluno, pela simulação, uma visão intuitiva sobre caracterização de máximos e mínimos de uma função. Inicialmente o professor pode explorar com os alunos o conceito de reta tangente, utilizando o Aplicativo 1 (representado na Figura 10).

Figura 10 – Aplicativo 1 sobre Reta Tangente



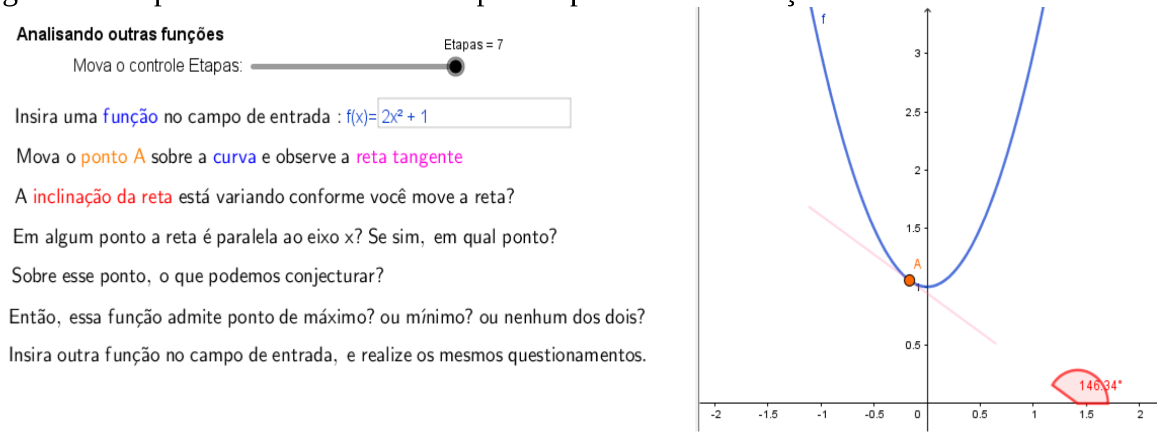
Fonte: a autora

Esse e os demais aplicativos foram construídos pensando em conectar a linguagem natural, algébrica e gráfica de maneira dinâmica, de modo que utilizando o controle deslizante ‘Etapas’, o usuário possa avançar nas etapas conforme sua compreensão sobre o que está sendo posto. Outra maneira de conectar essas diferentes representações foi usando a relação entre as cores. No aplicativo, o objeto em suas diferentes representações está relacionado visualmente pela cor correspondente.

A exploração dos aplicativos é imprescindível para que o usuário compreenda dinamicamente o que está sendo apresentado enquanto manuseia e verifica as relações simultâneas entre as representações algébricas e gráficas. Se não houver essa interação entre usuário e aplicativo, o produto perde sua particularidade.

Utilizando o Aplicativo 2 (Figura 11), o professor/aluno pode analisar outras funções e criar conjecturas.

Figura 11 – Aplicativo 2 desenvolvido para explorar outras funções



Fonte: a autora

Após esses dois aplicativos são apresentadas algumas perguntas que podem ser respondidas online pelo usuário, com o objetivo explorar conceitos da reta tangente.

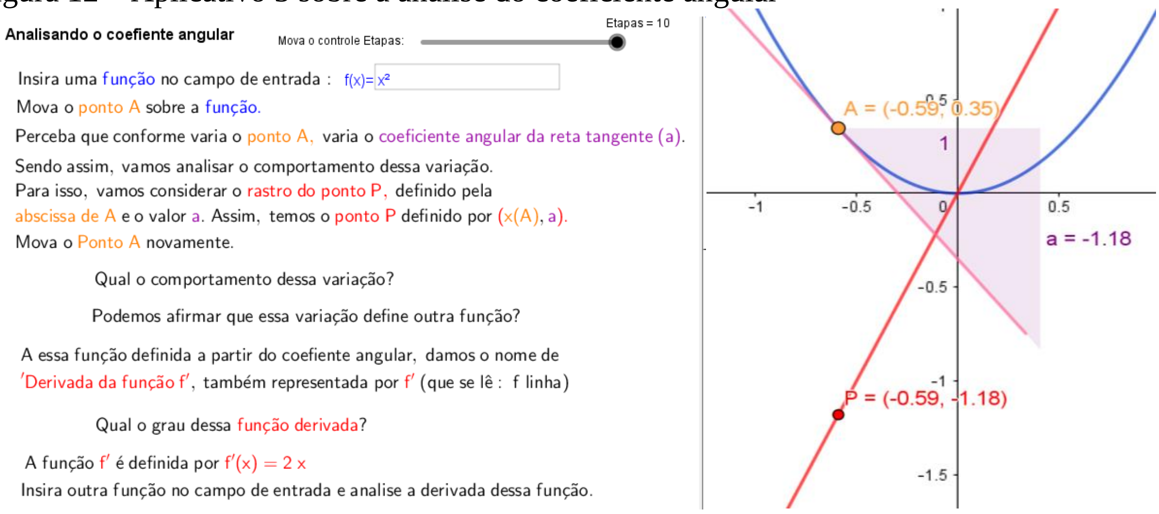
Perguntas:

- Você percebeu que a inclinação da reta tangente varia conforme movemos o ponto A sobre a função?
- Sendo assim, podemos afirmar que para cada abscissa do ponto A, obtemos um respectivo valor como coeficiente angular (tangente da inclinação da reta tangente)?

GeoGebra:

Analise o Aplicativo 3 (representado na Figura 12) que trata sobre o comportamento do coeficiente angular.

Figura 12 – Aplicativo 3 sobre a análise do coeficiente angular



Fonte: a autora

Função Derivada

Seguido disso, o professor pode explorar com os alunos como encontrar a função que apresenta os valores do coeficiente angular da reta tangente em cada ponto (ou seja, a função derivada). Para isso o professor pode apresentar aos alunos a regra de derivada de função polinomial:

$$f'(x) = nx^{x-1}$$

Exemplo: Calcular a função derivada da função f(x) apresentada no 'Aplicativo 1'.

$$f'(x) = 3x^2 + 2 \cdot 4x^1 + 0 = 3x^2 + 8x$$

Em seguida o professor pode calcular a função derivada de outras funções (faça isso utilizando também o Aplicativo 3):

1) $g(x) = 5x - 1$

   $g'(x) = 5$

2) $h(x) = 5x^3 - 4x + 6$

   $h'(x) = 3x^2 - 4$

3) $m(x) = x^4 + 2x^2 - x$

   $m'(x) = 4x^3 + 4x - 1$

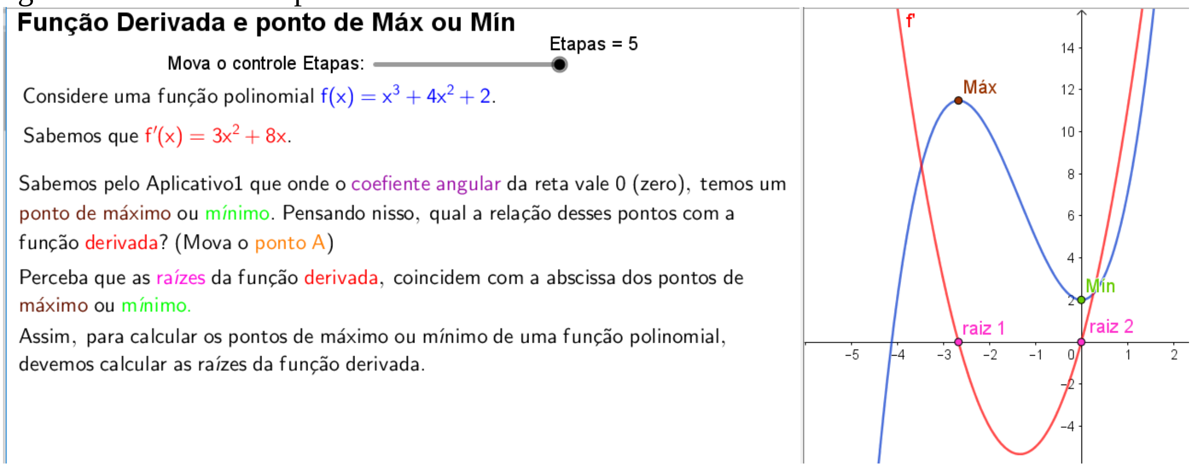
Exercícios

1) Derive a função:

a) $x^2 - 2x + 2$
b) $3x^4 + 5x$
c) $\frac{1}{2}x^3 - 6x^2 + 4x - 1$

Diante disso, vamos analisar como encontrar o(s) ponto(s) de Máximo ou Mínimo de uma função, utilizando sua derivada. Para isso, o professor/aluno pode analisar o Aplicativo 4 (Figura 13), que apresenta uma explicação de maneira dinâmica.

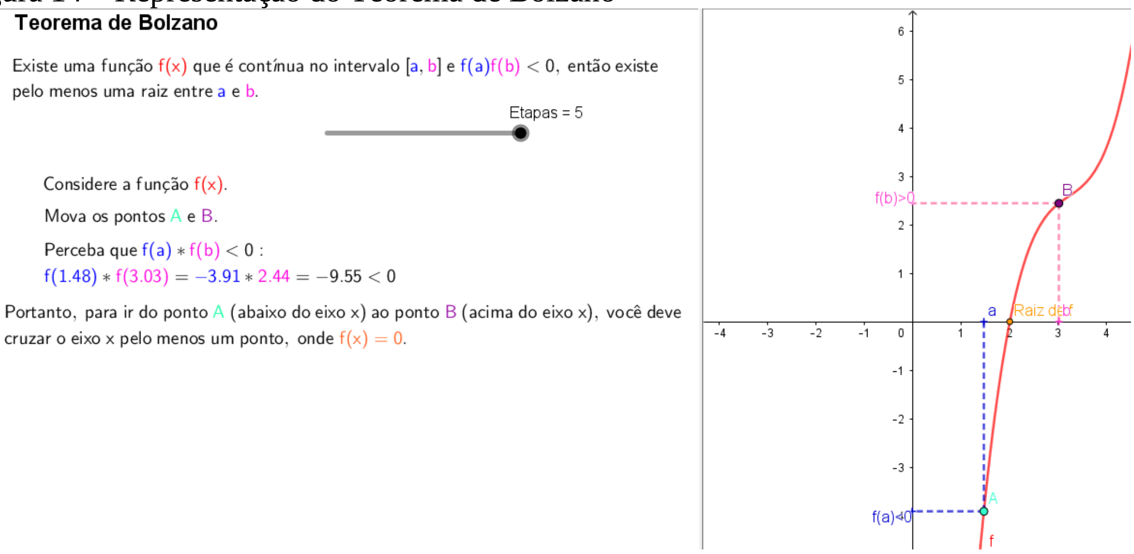
Figura 13 – Derivada e ponto de máximo ou mínimo



Fonte: a autora

No Ensino Médio os alunos sabem calcular as raízes de função polinomial do primeiro e segundo grau, todavia, dificilmente é explorado os cálculos de raízes de funções de maior grau. Um método relativamente simples de calcular as raízes de funções contínuas é usando o Teorema de Bolzano. Analise o 'Aplicativo 5' representado pela Figura 14, adaptado de Yang (2016). Obs.: Essa apresentação não demonstra o teorema.

Figura 14 – Representação do Teorema de Bolzano



Fonte: adaptado de Yang (2016)

Exemplo: Vamos encontrar o valor aproximado de uma raiz da função $f(x) = x^4 + x - 3$.

Resolução: Perceba que

$$f(1) = -1 < 0 \text{ e } f(2) = 15 > 15$$

Assim:

$$f(1) \cdot f(2) < 0$$

o que satisfaz o teorema. Com isso podemos afirmar que existe ao menos uma raiz nesse intervalo. Usando uma calculadora, vamos testar outros valores que se aproximam cada vez mais da raiz da função:

$$f(1{,}1) = -0{,}44 \text{ e } f(1{,}5) = 3{,}56$$

Assim, perceba que a raiz está muito próximo de $x = 1{,}1$, afinal:

$$f(1{,}2) = 0{,}27 > 0$$

Resolva:

1) Calcule o valor aproximado de uma raiz da função $f(x) = x^5 - x^2 + 2x + 3$.
2) Usando os conhecimentos vistos até o momento, verifique qual o valor mínimo da função $f(x) = 2x^4 + x + 1$.

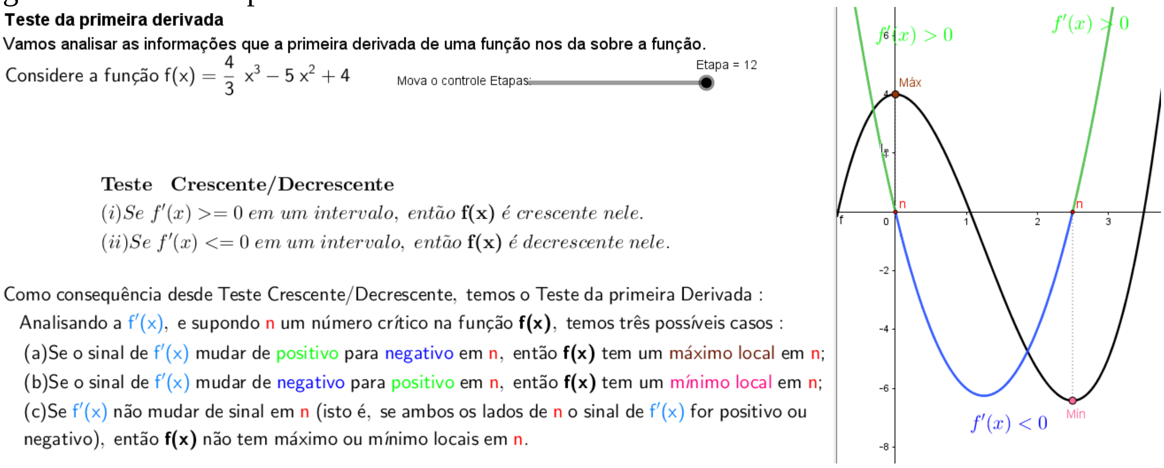
3.2 Ensino Superior: breve abordagem sobre máximos e mínimos

O conteúdo de Máximos e Mínimos de Funções é visto no Ensino Superior principalmente na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. Faremos aqui uma breve abordagem sobre o Teste da Primeira Derivada e o Teste da Segunda Derivada necessários para o cálculo de máximos e mínimos. As demais definições necessárias podem ser encontradas em livros de Cálculo (STEWART, 2011; HOFFMANN; BRADLEY, 2002). A abordagem dos testes será dada com viés dinâmico. Vale ressaltar que é conveniente que o professor realize a formalização desses resultados em sala com os alunos.

Teste da Primeira Derivada

Iniciaremos pelo Teste da Primeira Derivada: Aplicativo 6 (representado na Figura 15). Para apresentação desse teste é necessário que o aluno já tenha estudado sobre crescimento e decrescimento de funções, bem como, pontos críticos de funções.

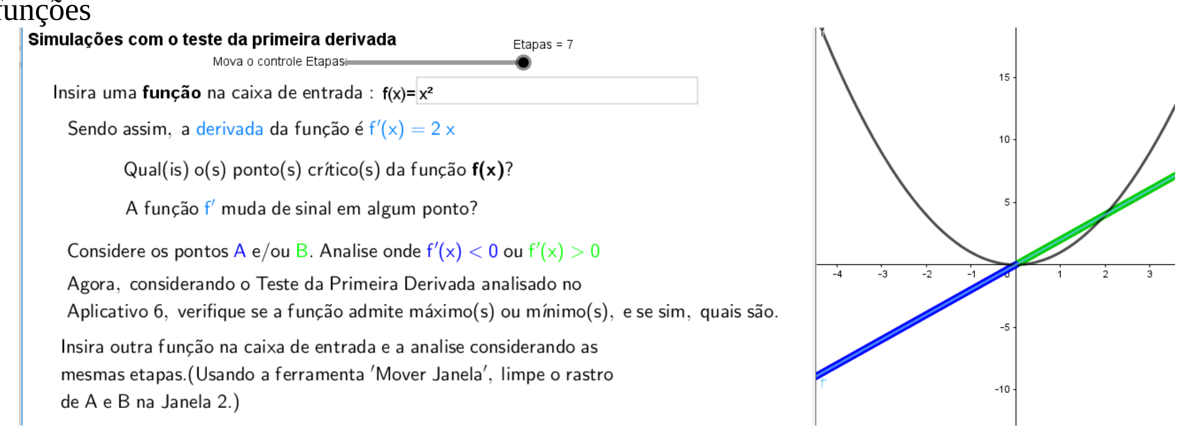
Figura 15 – Teste da primeira derivada



Fonte: a autora

Agora que você conhece o Teste da Primeira Derivada, use o Aplicativo 7 (Figura 16) para verificá-lo em outras funções.

Figura 16 – Aplicativo 7 desenvolvido para verificar o Teste da Primeira Derivada em outras funções



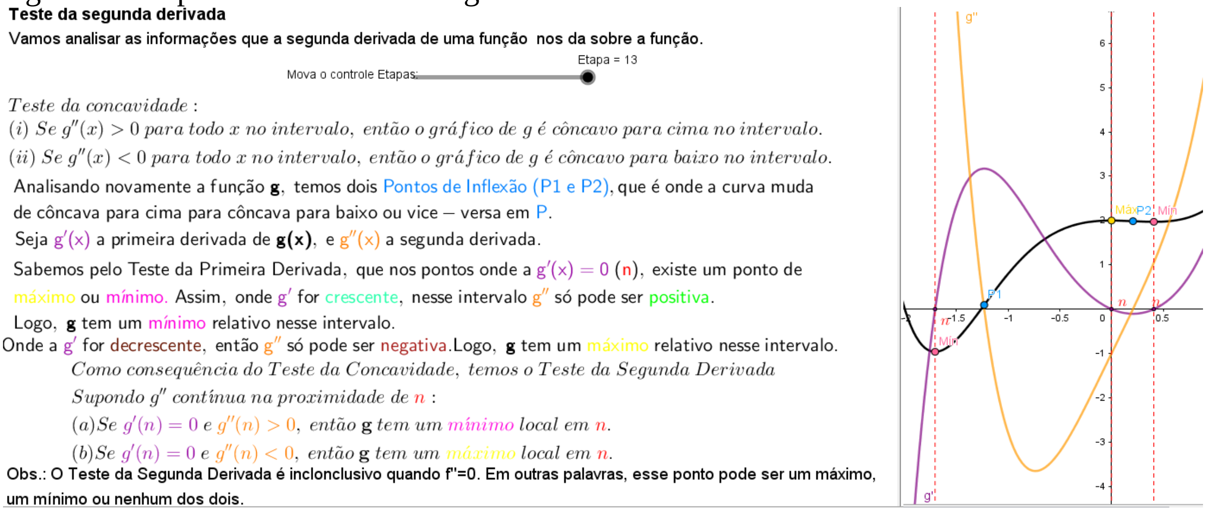
Fonte: a autora

Teste da Segunda Derivada

Após explorar os Aplicativos 6 e 7, o professor pode instigar os alunos a compreenderem o que a segunda derivada da função nos diz sobre ela. Em seguida o professor pode apresentar o Aplicativo 8 (representação na Figura 17). Para compreensão desse teste é necessário que os alunos já tenham estudado sobre ponto de inflexão, além de, crescimento, decrescimento e ponto crítico de função.

Obs.: O Aplicativo 8 não demonstra o Teste.

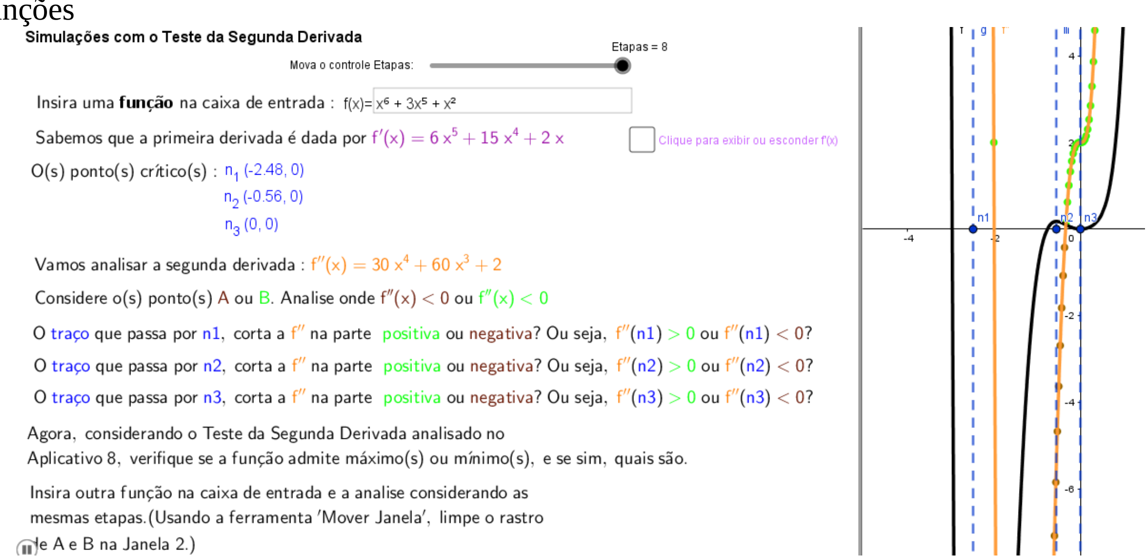
Figura 17 – Aplicativo 8 Teste da segunda derivada



Fonte: a autora

A partir disso, o professor/aluno pode explorar o Aplicativo 9 (Figura 18) para analisar outras funções usando o Teste da Segunda Derivada.

Figura 18 – Aplicativo 9 desenvolvido para verificar o teste da segunda derivada em outras funções



Fonte: a autora

Em relação a base teórica dos testes e teorema, usamos o livro de Cálculo de Stewart (2011).

Após serem explorados de maneira dinâmica os testes, propomos ao professor/aluno resolver os problemas apresentados no capítulo seguinte.

CAPÍTULO 4: SITUAÇÕES-PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Nesse capítulo são propostos diferentes situações-problema de otimização. Para compor esse capítulo os problemas foram criados ou adaptados a partir de livros ou artigos. Alguns dos aplicativos presentes nesse material foram inspirados em materiais já existentes na comunidade do GeoGebra, sendo adaptados para a proposição das atividades. No total são onze sequências didáticas propostas para serem utilizadas no ensino e aprendizagem de Máximos e Mínimos no Ensino Médio e/ou no Ensino Superior. A primeira tela desse capítulo apresenta o ícone referente a cada sequência proposta, como ilustra a Figura 19.

Figura 19 – Capítulo 4: Problemas de Otimização

Fonte: a autora

Os subitens a seguir mostram detalhadamente cada situação-problema proposta.

4.1 Área máxima da casa

Público alvo: Ensino Médio ou Superior.

Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

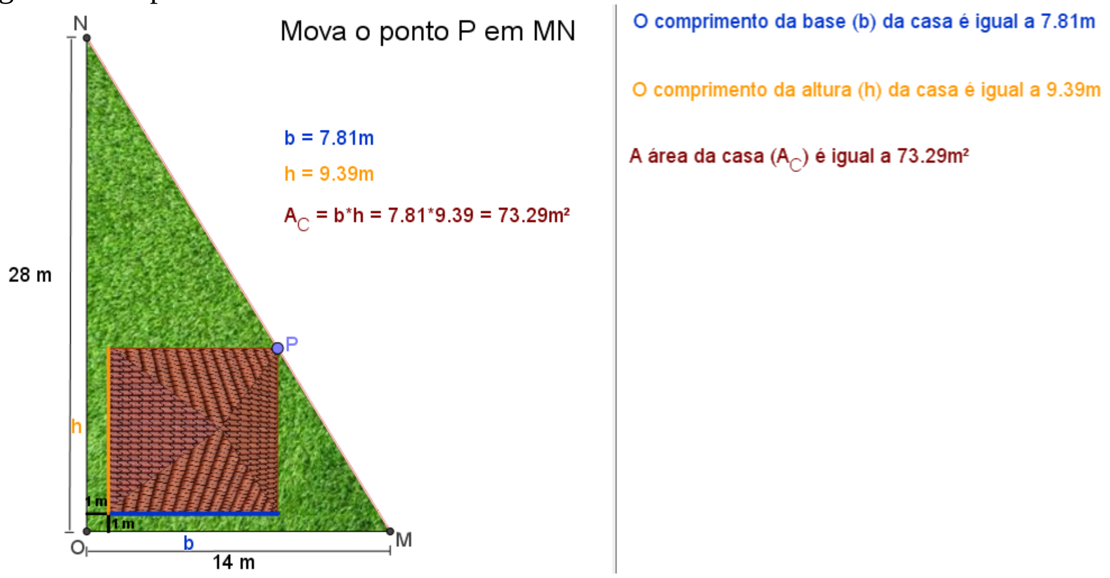
Situação-problema:

> José ganhou como herança um terreno triangular, conforme aplicativo 'Área da casa' abaixo, e deseja construir uma casa retangular com a maior área possível. Entretanto, ele precisa respeitar algumas restrições impostas pelo Plano Diretor de sua cidade para a construção. Algumas das restrições são que o canto indicado pelo ponto P fique sobre a lateral

MN do terreno e seja um dos cantos da casa, e que as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados. Ajude José encontrar as medidas da casa, que deverá construir, para que a área dela seja máxima.

Aplicativo: O Aplicativo ‘Área da casa’ foi adaptado de Cardoso (2016) de modo que ajudasse na compreensão do problema e a criar conjeturas. A Figura 20 ilustra esse aplicativo.

Figura 20 – Aplicativo ‘Área da casa’ referente ao Problema Área da casa



Fonte: adaptado de Cardoso (2016)

Perguntas:

- A área da casa está variando? (Analise o aplicativo 'Área da casa')
- Existe alguma dependência entre as medidas da casa?
- O que está limitando a medida altura da casa?
- Existe uma função que representa a medida ‘base’ da casa? E alguma que represente a ‘altura’? Quais? (não esqueça de considerar as restrições).
- É possível descrever uma função que represente a área da casa? Se sim, qual?
- Qual o valor da área máxima da casa nessa situação? (Realize os cálculos e verifique no aplicativo)

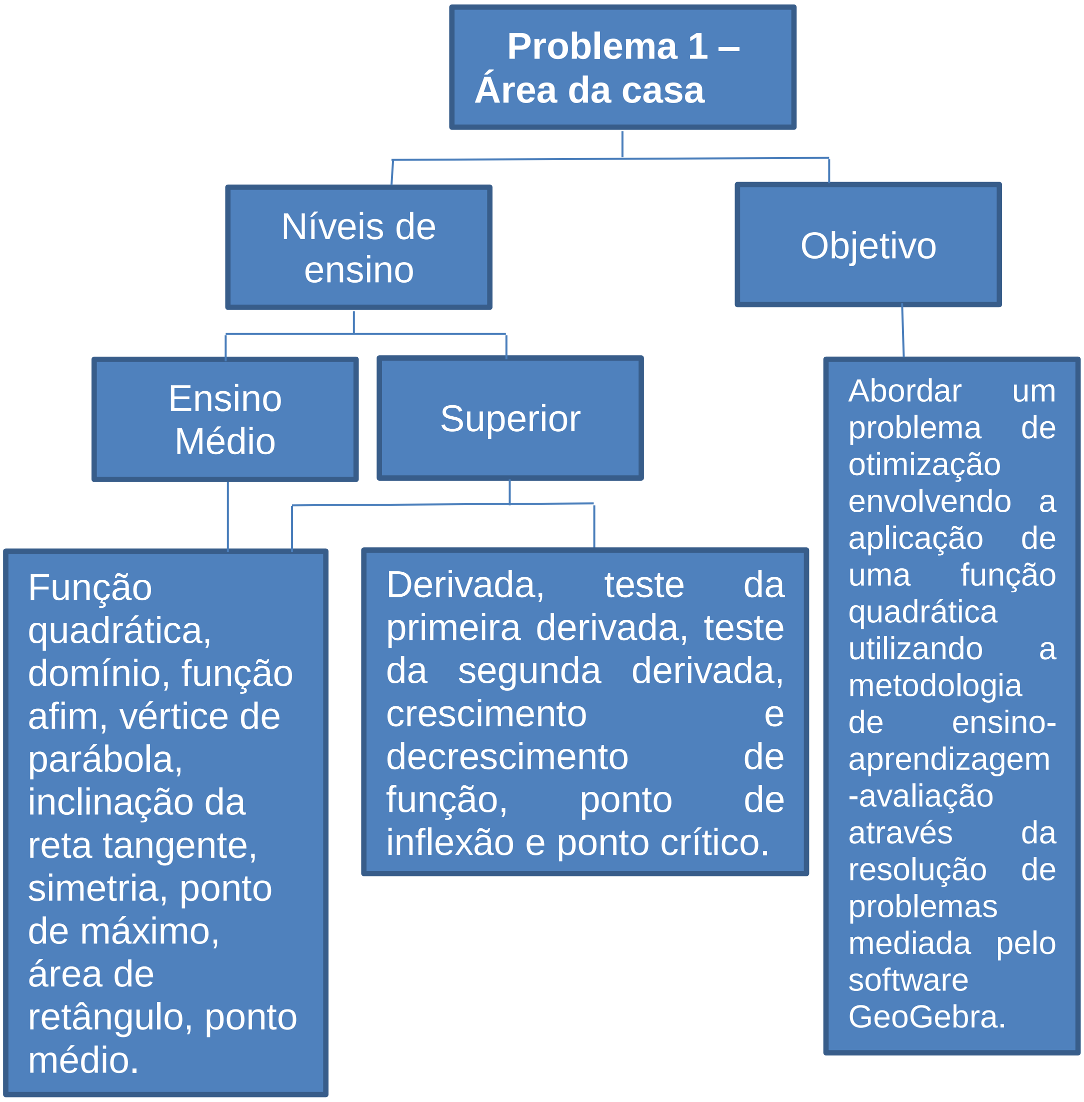
As perguntas acima são apresentadas na página online e podem ser respondidas utilizando a própria plataforma. Para isso haverá um campo escrito ‘Digite aqui sua resposta’ abaixo de cada questão. Nas questões com apenas uma resposta correta, o usuário pode verificar a resposta clicando em ‘Verifique sua resposta’. Em todas as demais perguntas que serão apresentadas nesse capítulo, utilizamos essa ferramenta disponibilizada pelo GeoGebraBook.

O **Problema 1** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 1).

O material ‘**Conversando com o professor**’ também é disponibilizado em PDF. Esse material tem como objetivo guiar o professor caso opte por utilizar a sequência didática em sua sala de aula. O Quadro 1 apresenta esse material referente ao Problema 1 – Área da casa (também disponibilizado no Apêndice 2).

Quadro 2 – Apresentação do material ‘Conversando com o professor’ referente ao Problema 1

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

Inicialmente é conveniente que o professor estipule um tempo para a resolução do problema.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve disponibilizar o **'Aplicativo 01 – primeiro momento'** em anexo. Para isso, o professor pode enviar o link 'https://ggbm.at/BSeh8kqS' por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

O professor deve estar preparado para conferir estratégias de resolução não necessariamente ligadas ao conteúdo de otimização, como por exemplo, conceitos de Geometria, Trigonometria ou dobradura (essas estratégias estavam presentes na aplicação do trabalho de Cardoso (2018)).

Durante a resolução do problema, caso os alunos estejam discutindo a possibilidade de o valor máximo da área da casa ser o ponto médio do triângulo OMN, o professor poderá utilizar o arquivo **'Aplicativo 01 - refutações'** em anexo na página do GeoGebraBook. Porém, como até esse momento os alunos podem não ter concluído a resolução, sugere-se que o professor feche a 'Janela de visualização 2' e 'Janela de visualização 3D'.

Enquanto o professor observa e media, o professor pode fazer as seguintes questões se achar conveniente:

- Existe alguma dependência entre as dimensões da casa?
- Vocês acham conveniente representar a figura sobre um plano cartesiano? Se sim, o que a reta MN pode representar em relação ao conteúdo de funções já visto?
- É possível plotar valores no plano cartesiano considerando a dependência da base com a altura? (Nesse momento o professor poderá auxiliar os alunos a usarem o software GeoGebra para plotar os pares ordenados).
- Qual o comportamento desses pares ordenados? Que tipo de figura eles sugerem?
- Existem diferentes construções com a mesma área?
- Matematicamente pode-se construir uma lei de formação com esses dados?
- Qual é a função?
- Essa função apresenta pontos extremos? O que ele(s) significa(m)?
- Como encontrá-los?

Obs.: Essas questões devem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta e então explorar o aplicativo **'Aplicativo 01 – segundo momento'** em anexo. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie pelo menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Por fim, professor, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que o professor utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebraBook, bem como, o **‘Problema 1 - generalização’,** em anexo, que visa generalizar o problema da área máxima da casa. Para isso, o professor pode utilizar o arquivo em PDF e também o aplicativo ‘**Aplicativo 01 - refutações’,** já citado. Outra sugestão é que o professor instigue os alunos a resolver o seguinte problema:

> Um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e localizado no primeiro quadrante tem um vértice na origem, um vértice sobre o eixo x, um vértice sobre o eixo y e o quarto vértice sobre a reta $2x + y = 100$. Qual a área máxima de tal retângulo?

O professor pode solicitar que os alunos construam a representação desse problema no GeoGebra dinamicamente. Os alunos deverão perceber que o apesar de mudar o contexto do problema em relação ao Problema 1, as estratégias de resolução podem ser as mesmas.

Bom trabalho!

Fonte: a autora

Após isso estão disponibilizados os três links para baixar os aplicativos que podem ser úteis na resolução do problema, conforme descrito nos Apêndices 1 e 2. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 21.

Figura 21 – Links para baixar os aplicativos presentes no subitem 4.1

Atividade 01 - primeiro momento

Atividade 01 - segundo momento

Atividade 01 - refutações

Fonte: a autora

Por fim, no final na página, está disponibilizado uma proposição de generalização desse problema ‘Área máxima da casa’, conforme apresenta o Apêndice 3.

4.2 Volume máximo da caixa

Público alvo: Ensino Médio ou Superior.

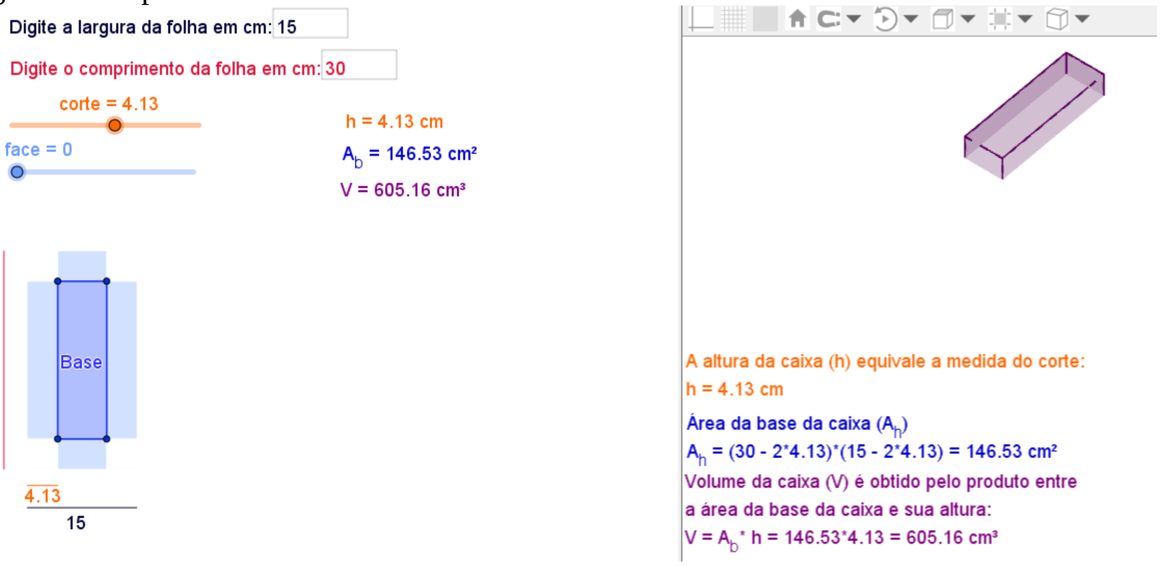
Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função cúbica utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

> Dada uma folha retangular, construa uma caixa, sem tampa, cujo volume seja máximo. Construa essa caixa, usando as dimensões da folha retangular dada, após serem cortados quadrados dos cantos dessa folha, conforme apresenta o aplicativo 'Volume da caixa'.
> Sendo assim, quais devem ser as dimensões da caixa para que o seu volume seja o maior possível? Qual o valor desse volume?

Aplicativo: O Aplicativo 'Volume da caixa', adaptado de Dantas (2015), foi proposto de modo que ajudasse na compreensão do problema e a criar conjeturas. A Figura 22 ilustra esse aplicativo.

Figura 22 – Aplicativo 'Volume da caixa' referente ao Problema do Voluma da caixa



Fonte: adaptado de Dantas (2015)

Perguntas:

- Se o tamanho do corte fosse 5 cm, qual seria a área da base da caixa? E o volume dessa caixa? E se fosse 2 cm? (Analise no aplicativo 'Volume da casa'). Quais os cálculos realizados para verificar esses valores?
- Existe alguma dependência entre a medida do lado do quadrado (corte) e as medidas da caixa? (Analise pelo aplicativo 'Volume da casa')
- Que função descreve a área da base da caixa? E a função volume?
- Qual o volume máximo?

O **Problema 2** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 4).

O material '**Conversando com o professor**' também é disponibilizado em PDF (Ver Apêndice 5).

Em seguida estão disponíveis os links para baixar os aplicativos citados no Apêndice 5. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 23.

Figura 23 – Links para baixar os aplicativos presentes no subitem 4.2

Atividade 02 - primeiro momento

Atividade 02 - segundo momento

Fonte: a autora

Por fim, em PDF está disponibilizado uma proposta do problema generalizado conforme mostra o Apêndice 6.

4.3 Área máxima ou mínima das figuras usando um barbante

Público alvo: Ensino Médio ou Superior.

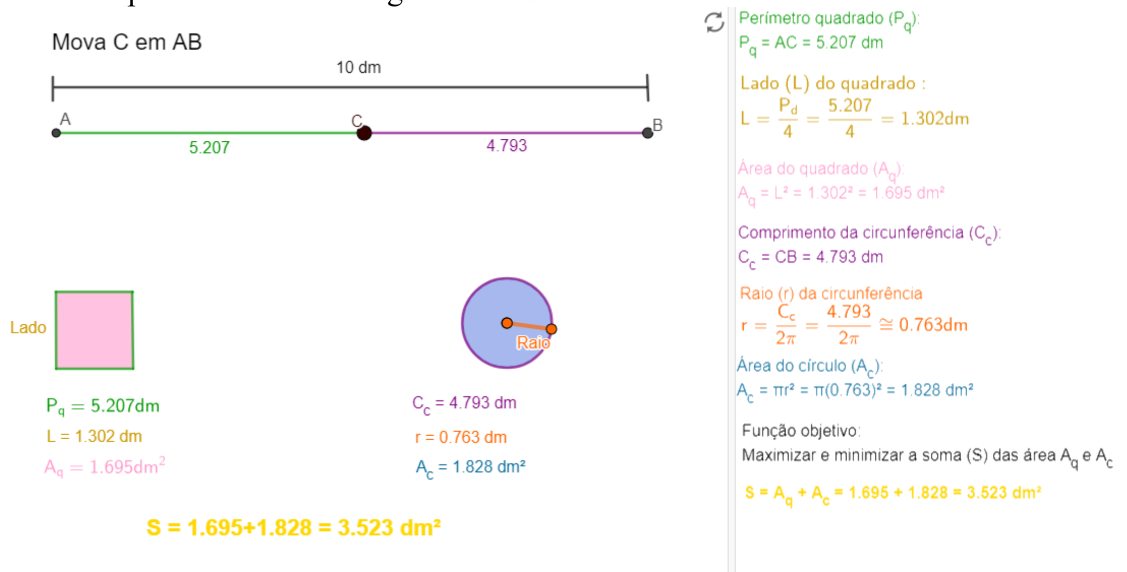
Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

> A professora de João propôs um trabalho para a turma dele no qual cada aluno deveria propor um problema usando os conhecimentos de funções. João pensou em explorar a construção de figuras geométricas que maximizam a área. Para a construção das figuras ele dispunha de um barbante de 10 decímetros de comprimento. Assim, ele pensou que com esse barbante ele poderia:
>
> a) construir um quadrado;
> b) construir uma circunferência;
> c) cortar em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho) de modo que um dos pedaços fosse usado para construir um quadrado e o outro para construir uma circunferência.
>
> Em qual situação João conseguirá a área máxima? E a área mínima? Resolva o problema proposto por João criticamente, apontando os conceitos envolvidos e as potencialidades/deficiências do problema.

Aplicativo: A Figura 24 ilustra o aplicativo ‘Área de figuras usando um barbante’.

Figura 24 – Aplicativo ‘Área de figuras usando um barbante’



Fonte: a autora

Perguntas:

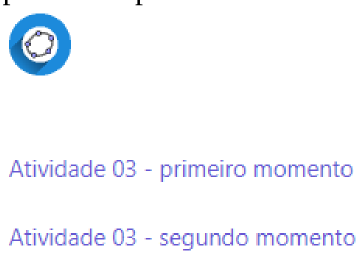
- Como calculamos a área de um quadrado? E a área um círculo?
- Se variarmos o tamanho do corte e as respectivas medidas para construir cada uma das figuras, a soma das áreas irá mudar ou será ser sempre a mesma, já que o tamanho do barbante utilizado é fixo? (Analise o aplicativo 'Área de figuras usando um barbante').
- Como podemos escrever uma função que determina a área do quadrado em função do corte? E a área do círculo?
- Qual o valor máximo da soma das áreas? E o mínimo? (Realize os cálculos e verifique no aplicativo)

O **Problema 3** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 7).

O material ‘**Conversando com o professor**’ também é disponibilizado em PDF (Ver Apêndice 8).

Em seguida estão disponíveis os links para baixar os aplicativos citados no Apêndice 8. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 25.

Figura 25 – Links para baixar os aplicativos presentes no subitem 4.3



Fonte: a autora

4.4 Faturamento máximo de uma viação

Público alvo: Ensino Médio ou Superior.

Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

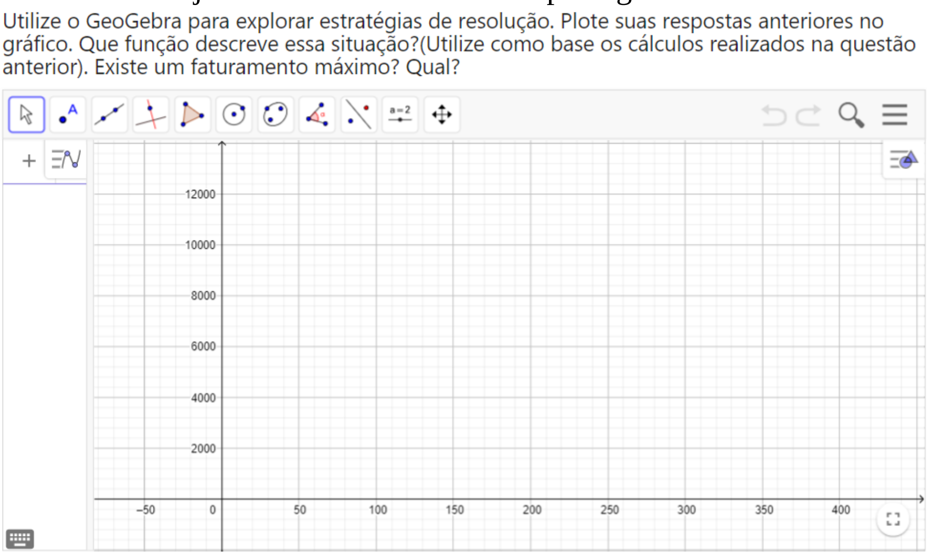
> Em uma viagem de formatura do Ensino Médio, há capacidade para 66 pessoas no ônibus que será fretado. A viação de ônibus cobra R$200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$4,00 por cada lugar não ocupado. Com o objetivo de otimizar o faturamento da viação, é importante que ela tenha conhecimento sobre qual o número ideal de passageiros. Diante disso, ajude a viação a analisar e calcular seu melhor faturamento.

Perguntas:

- Se todos os lugares estivessem ocupados, qual o faturamento obtido pela viação?
- Se o número de lugares não ocupados fosse 3 (por exemplo), qual o faturamento obtido? E se fosse 10? Que cálculo você fez ou pode fazer para calcular esse(s) faturamento(s)?

Aplicativo: Não foi elaborado um aplicativo para esta questão. O intuito é que o aluno investigue suas conjecturas utilizando o GeoGebra para explorar suas respostas anteriores. A Figura 26 ilustra como é apresentado no produto.

Figura 26 – Teste suas conjecturas sobre o número de passageiros



Fonte: a autora

O **Problema 4** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 9).

O material '**Conversando com o professor**' também é disponibilizado em PDF (Ver Apêndice 10).

4.5 Área máxima do cercado de uma horta

Público alvo: Ensino Médio ou Superior.

Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

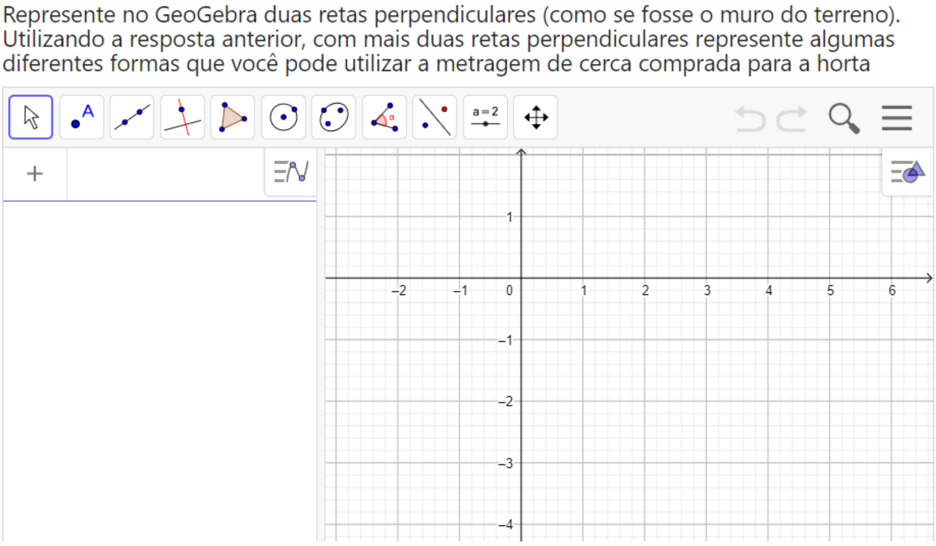
> Suponha que você queira cercar uma área retangular no seu terreno, com tela de arame, que será reservada a uma horta. Para economizar nessa construção, você aproveita um canto perpendicular do muro no seu terreno. Assim, apenas restam serem cercados dois lados para obter o espaço para a horta, porém você tem um orçamento de R$ 150,00 para investir na cerca da horta. Após realizar uma pesquisa num site de comparação de preços verifica-se que o menor preço da tela é aproximadamente R$ 18,20 por metro numa loja próxima de sua casa. Pensando em otimizar esse espaço, verifique quais devem ser as medidas de cada lado da horta.

Pergunta:

- Você está disposto a gastar R$ 150,00 de cerca. Considerando que o valor da cerca seja em médio R$ 18,20, qual a metragem total que você consegue comprar aproximadamente?

Aplicativo: Não foi elaborado um aplicativo para esta questão. O intuito é que o aluno investigue suas conjecturas utilizando o GeoGebra para explorar sua resposta anterior. A Figura 27 ilustra como é apresentado no produto.

Figura 27 – Teste suas conjeturas sobre a maximização da horta



Fonte: a autora

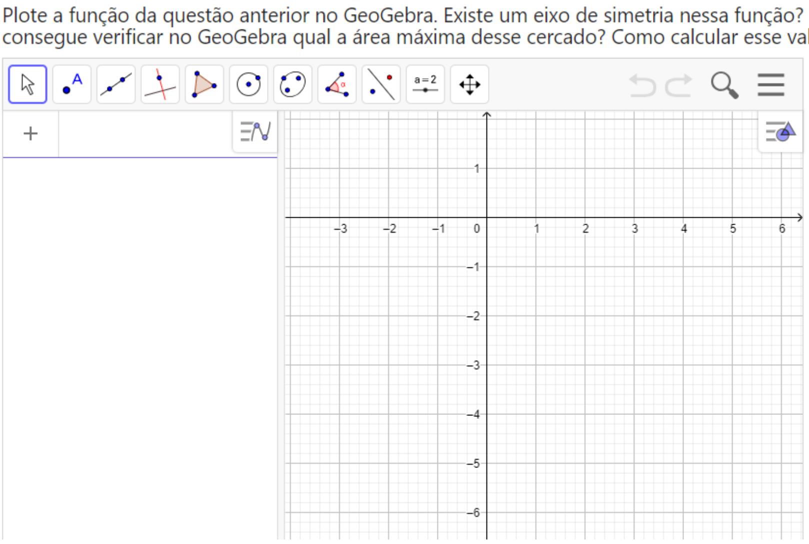
Perguntas:

- A área varia conforme você muda a medida dos lados do cercado? (Analise o que você construiu na questão anterior).

- Existe alguma dependência entre a medida do comprimento (ou largura) e a área do cercado? Se sim, é possível descrever uma função que representa sua área? Qual?

Aplicativo: A Figura 28 ilustra como é apresentado no GeoGebraBook.

Figura 28 – Representação gráfica da função



Fonte: a autora

O **Problema 5** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 11).

O material '**Conversando com o professor**' também é disponibilizado em PDF (Ver Apêndice 12).

4.6 Problema da calha

Esse problema é composto por cinco casos. Cada caso será apresentado em um subitem na sequência, ou seja, 4.6.1; 4.6.2; 4.6.3; 4.6.4 e 4.6.5.

Sugerimos que a resolução dos problemas seja feita nessa ordem, pois a reflexão de cada etapa auxilia na generalização do conhecimento.

Esse problema foi adaptado de Menino e Onuchic (2017).

4.6.1 – Capacidade máxima da calha retangular

O primeiro caso é o da calha em formato retangular.

Público alvo: Ensino Superior.

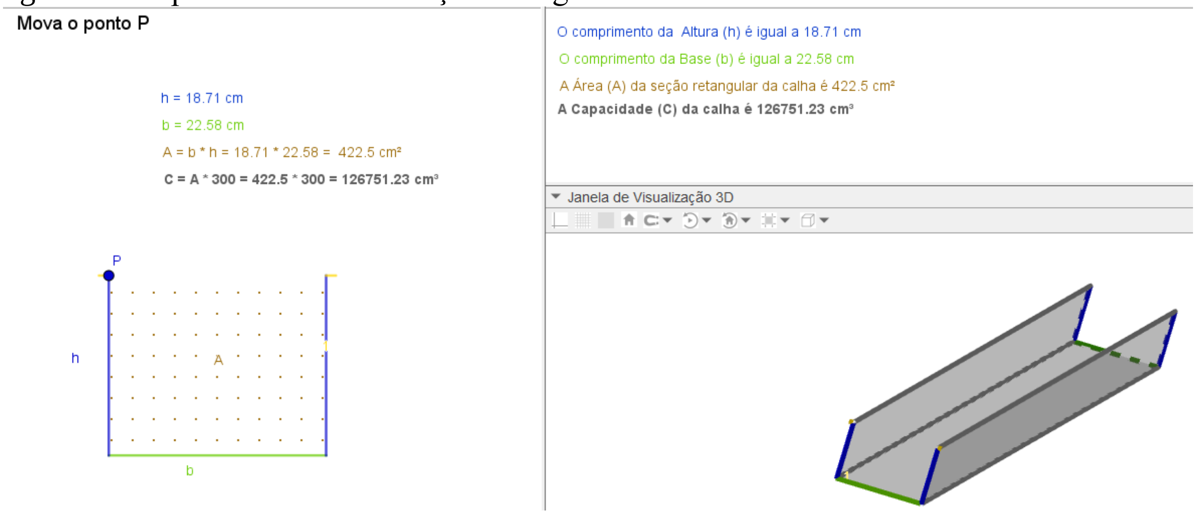
Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

> Uma chapa galvanizada retangular, com 3 m de comprimento e 62 cm de largura, será dobrada em formato de seção **retangular** de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Deseja-se obter as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade. Assim como mostra o aplicativo 'Calha - seção retangular', considere uma ‘dobra’ de 1 cm de cada lado ao longo da calha que será usada para fixação.

Aplicativo: O Aplicativo ‘Calha – seção retangular’ foi criado de modo que ajudasse na compreensão do problema e a criar conjeturas. A Figura 29 ilustra esse aplicativo.

Figura 29 – Aplicativo ‘Calha – seção retangular’ referente ao Problema da Calha



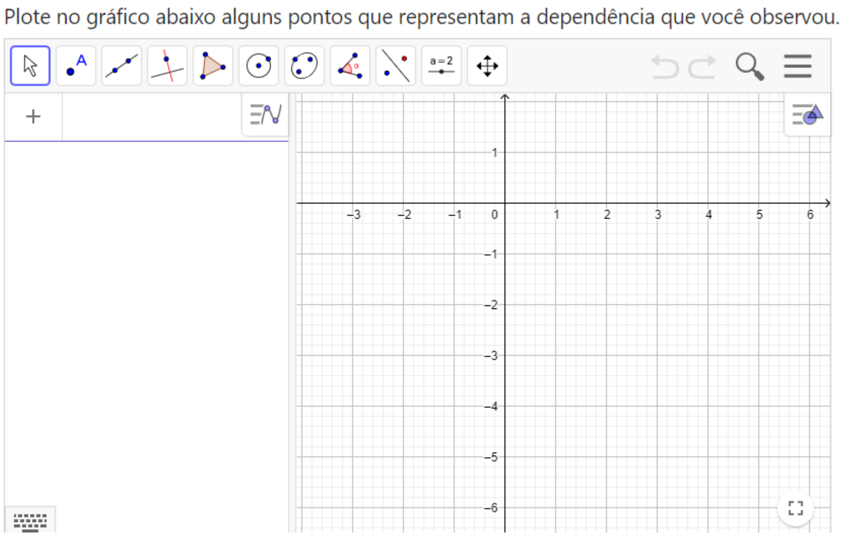
Fonte: a autora

Perguntas:

- A capacidade da calha muda conforme variam as medidas da lateral, ou será sempre a mesma, pois a chapa fornecida tem tamanho fixo? (Utilize o aplicativo do GeoGebra 'Calha - seção retangular' para ajudar a responder).
- Existe alguma dependência entre as variáveis base e altura no aplicativo?

Aplicativo: As ferramentas do GeoGebra são disponibilizadas para o aluno plotar alguns valores que constatou até esse momento da resolução (Ver Figura 30).

Figura 30 – GeoGebra disponibilizado para plotar resultados



Fonte: a autora

Perguntas:

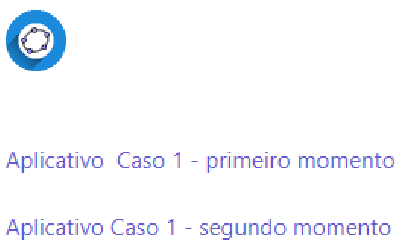
- Qual função descreve a seção área retangular?
- E a capacidade da calha?
- Qual o valor da capacidade máxima?

O **Problema 6** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 13).

O material '**Conversando com o professor**' também é disponibilizado em PDF (Ver Apêndice 14). Esse material é o mesmo para os cinco casos do problema da calha.

Em seguida estão disponíveis os links para baixar os aplicativos referentes ao Caso 1. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 31.

Figura 31 - Links para baixar os aplicativos presentes no subitem 4.6.1



Fonte: a autora

4.6.2 – Capacidade máxima da calha triangular

Público alvo: Ensino Superior.

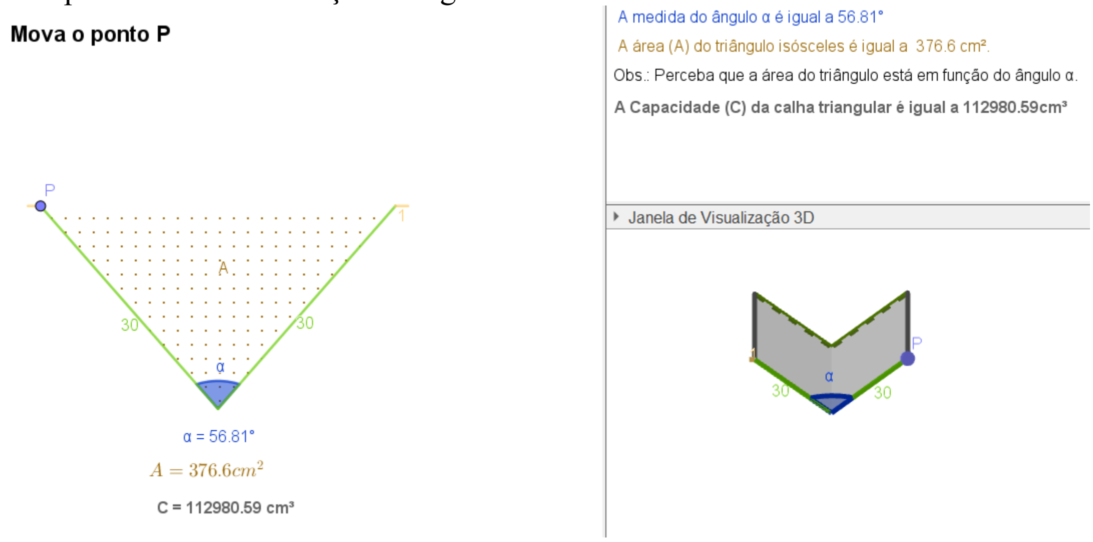
Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função trigonométrica utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

> Suponha agora que a mesma chapa galvanizada retangular com 3 m de comprimento e 62 cm de largura (mesma da situação anterior), fosse dobrada em formato de seção **triangular** de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Quais as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade? Assim como mostra o aplicativo 'Calha - seção triangular', considere uma 'dobra' de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação.

Aplicativo: O Aplicativo 'Calha – seção triangular' foi criado de modo que ajudasse na compreensão do problema e a criar conjeturas. A Figura 31 ilustra esse aplicativo.

Figura 32 – Aplicativo 'Calha – seção triangular' referente ao Problema da Calha



Fonte: a autora

Perguntas:

- Analisando o aplicativo 'Calha - seção triangular', responda: Que valor está variando no Caso 2?
- Que função define a área dessa seção em relação a variável respondida na questão anterior? Qual a função capacidade da calha?
- Quando a função capacidade da calha atinge seu máximo? Qual o valor da capacidade máxima?
- Você já resolveu o Caso 1 do problema da calha? Se sim, responda se podemos afirmar que o valor da capacidade da calha independe do formato da seção.

O **Problema 6.2** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 15).

Em seguida estão disponíveis os links para baixar os aplicativos referentes ao Caso 2. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 33.

Figura 33 – Links para baixar os aplicativos presentes no subitem 4.6.2

Aplicativo Caso 2 - primeiro momento

Aplicativo Caso 2 - segundo momento

Fonte: a autora

4.6.3 Capacidade máxima da calha trapezoidal

Público alvo: Ensino Superior.

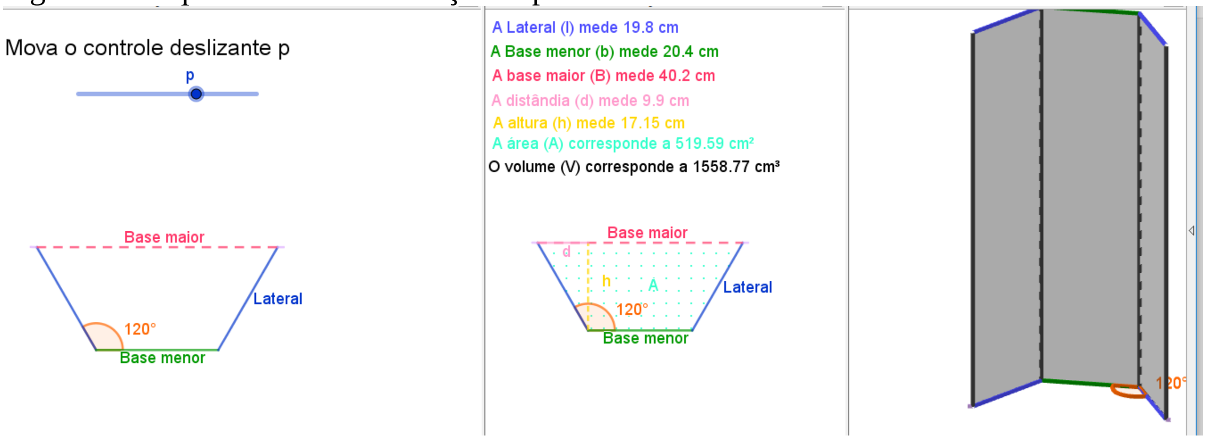
Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

> Suponha a chapa galvanizada retangular de 3 metros de comprimento por 62 cm de largura dobrada em formato de seção **trapezoidal** de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Quais as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade? Assim como mostra o aplicativo 'Calha - Caso 3', considere uma 'dobra' de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação, e um ângulo fixo de 120°.

Aplicativo: O Aplicativo 'Calha – seção trapezoidal' foi criado de modo que ajudasse na compreensão do problema e a criar conjeturas. A Figura 34 ilustra esse aplicativo.

Figura 34 – Aplicativo 'Calha – seção trapezoidal' referente ao Problema da Calha



Fonte: a autora

Perguntas:

- As medidas de base e altura do trapézio influenciam no valor da capacidade da calha?
- Por que a medida admite um valor máximo e um valor mínimo?

- Descreva a função área da seção trapezoidal usando apenas uma variável.
- Qual função descreve o comportamento da capacidade da calha? Qual a capacidade máxima? (Utilize as ferramentas do GeoGebra ou uma calculadora para realizar os cálculos de maximização).

O **Problema 6.3** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 16).

Em seguida estão disponíveis os links para baixar os aplicativos referentes ao Caso 3. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 35.

Figura 35 – Links para baixar os aplicativos presentes no subitem 4.6.3

Aplicativo Caso 3 - primeiro momento

Aplicativo Caso 3 - segundo momento

Fonte: a autora

4.6.4 Capacidade máxima da calha semicircular

Público alvo: Ensino Superior.

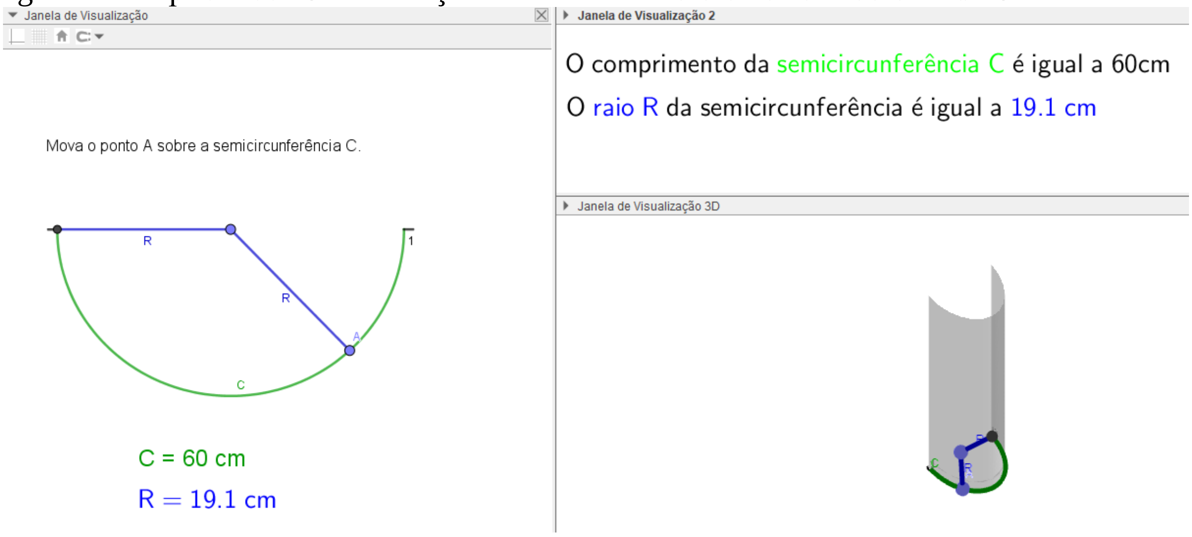
Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Situação-problema:

> Suponha que essa chapa galvanizada retangular, de 3 metros de comprimento por 62 cm de largura, seja dobrada em formato de seção **semicircular** de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Quais medidas dessa seção proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade? Assim como mostra o aplicativo 'Calha - seção semicircular', considere uma 'dobra' de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação.

Aplicativo: A Figura 36 ilustra o aplicativo 'Calha – seção semicircular'.

Figura 36 – Aplicativo 'Calha – seção semicircular' referente ao Problema da Calha



Fonte: a autora

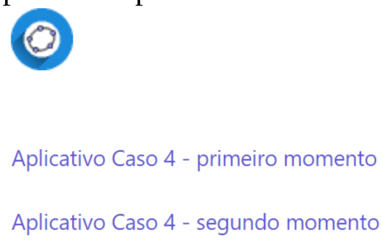
Perguntas:

- Existe alguma variável nesse caso? Se sim, qual? Se não, porquê?
- Qual a fórmula da área do círculo? E de um semicírculo? E do volume de um cilindro?
- Qual a capacidade dessa calha?

O **Problema 6.4** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 17).

Em seguida estão disponíveis os links para baixar os aplicativos referentes ao Caso 4. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 37.

Figura 37 – Links para baixar os aplicativos presentes no subitem 4.6.4



Fonte: a autora

4.6.5 Capacidade máxima da calha retângulo-circular

Público alvo: Ensino Superior.

Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

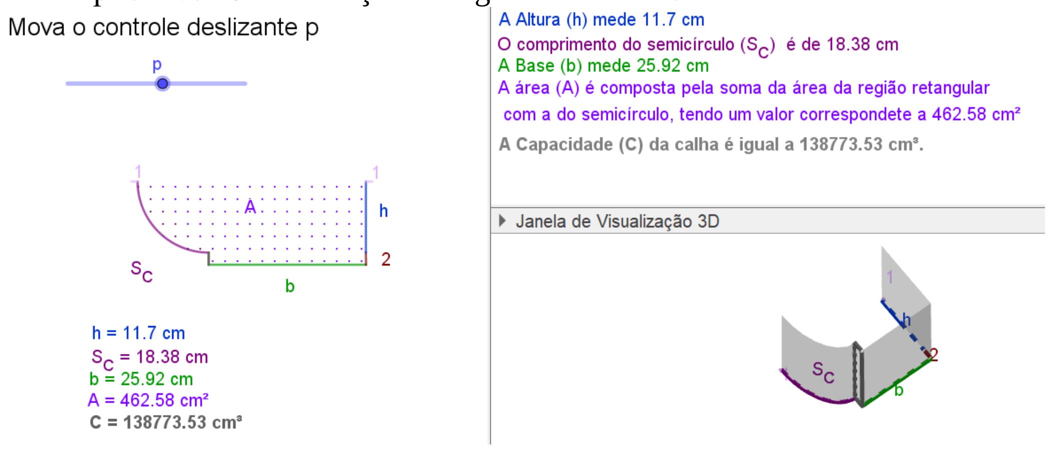
Situação-problema:

> Suponha agora que a mesma chapa galvanizada retangular de 3 metros de comprimento por 62 cm de largura, fosse dobrada em formato de

seção **retângulo-circular** de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Quais as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade? Assim como mostra o aplicativo 'Calha - seção triangular', considere uma 'dobra' de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação.

Aplicativo: O Aplicativo 'Calha – seção retângulo-circular' foi criado de modo que ajudasse na compreensão do problema e a criar conjeturas. A Figura 38 ilustra esse aplicativo.

Figura 38 – Aplicativo 'Calha – seção retângulo-circular' referente ao Problema da Calha

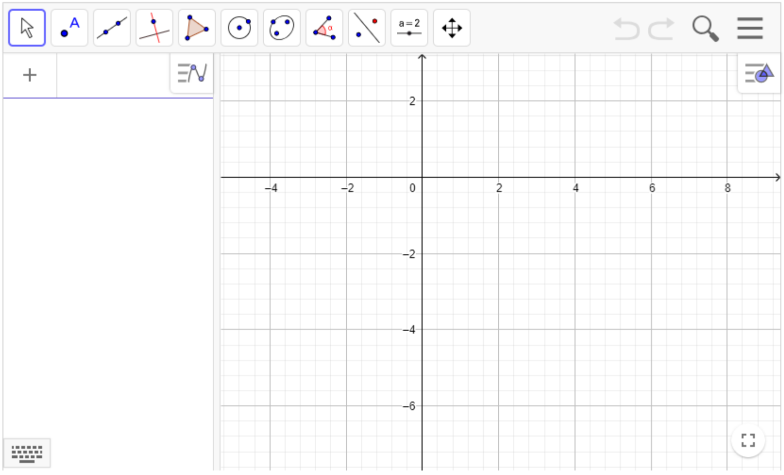


Fonte: a autora

Perguntas:

- Você já resolveu os casos anteriores da situação-problema da calha? Caso ainda não tenha resolvido, é interessante que você os resolva para dar continuidade.
- Você verificou no aplicativo 'Calha - seção retângulo-circular' que as medidas influenciam na capacidade da calha mesmo o tamanho da chapa sendo fixo?
- Que figuras geométricas estão parcialmente representadas no aplicativo? Que função define essa situação? (Use seus conhecimentos sobre área de retângulo e área de círculo).
- Utilizando a função definida na questão anterior e as ferramentas do software GeoGebra (janela abaixo) (Ver Figura 39 que ilustra a tela do GeoGebra), calcule e verifique o valor máximo da capacidade da calha no Caso 5. Qual o valor encontrado?

Figura 39 – Ilustração da tela do GeoGebra



Fonte: a autora

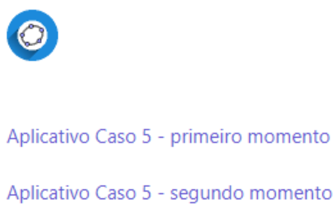
Pergunta:

- Considerando a chapa retangular de 3 metros de comprimento por 62 cm de largura, assinale qual das seções abaixo determina sua maior capacidade de água:
  a) Seção retangular
  b) Seção triangular
  c) Seção trapezoidal
  d) Seção semicircular
  e) Seção retângulo-circular

O **Problema 6.5** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 18).

Em seguida estão disponíveis os links para baixar os aplicativos referentes ao Caso 5. Na tela os links aparecerem como ilustra a Figura 40.

Figura 40 – Links para baixar os aplicativos presentes no subitem 4.6.5



Fonte: a autora

4.7 Análise de função racional

Público alvo: Ensino Médio e Superior.

Objetivo: Abordar um problema de otimização envolvendo a aplicação de uma função racional utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

Problema:

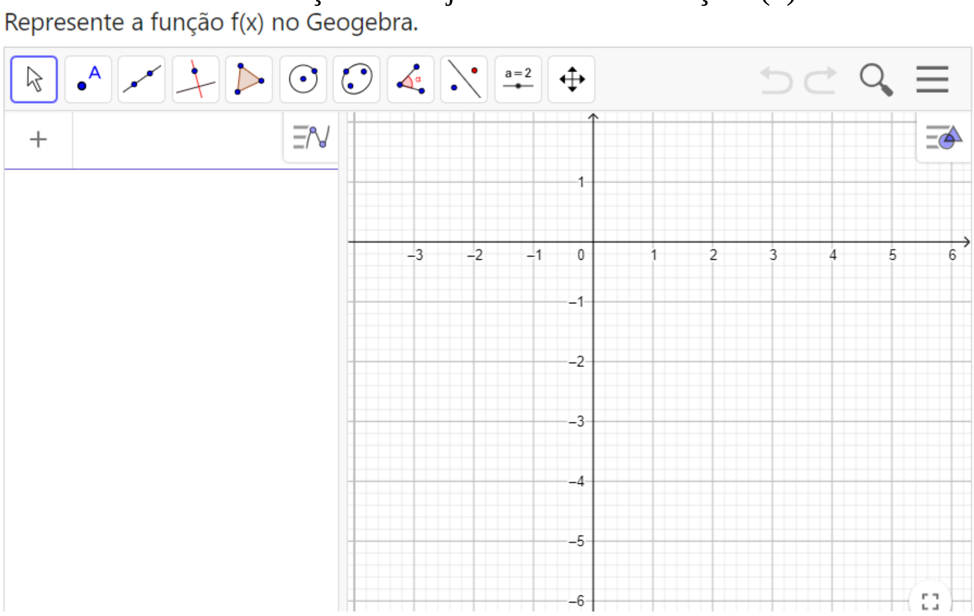
Dada a função contínua $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, analise-a algebricamente, encontre seu(s) valor(es) extremo(s) e apresente seu gráfico.

Perguntas:

- Qual o domínio dessa função?
- Quantos extremos a função apresenta? Que comportamento espera no gráfico dessa função?

Aplicativo: Não foi elaborado um aplicativo para esta questão. O intuito é que o aluno investigue suas conjecturas utilizando o GeoGebra para explorar sua resposta anterior. A Figura 41 ilustra como é apresentado no produto.

Figura 41 - GeoGebra na verificação de conjecturas sobre a função f(x)



Fonte: a autora

Perguntas:

- Existe(m) ponto(s) em que a função não está definida? Justifique.
- A função tem ponto(s) extremo(s)? Se sim, em qual ponto?

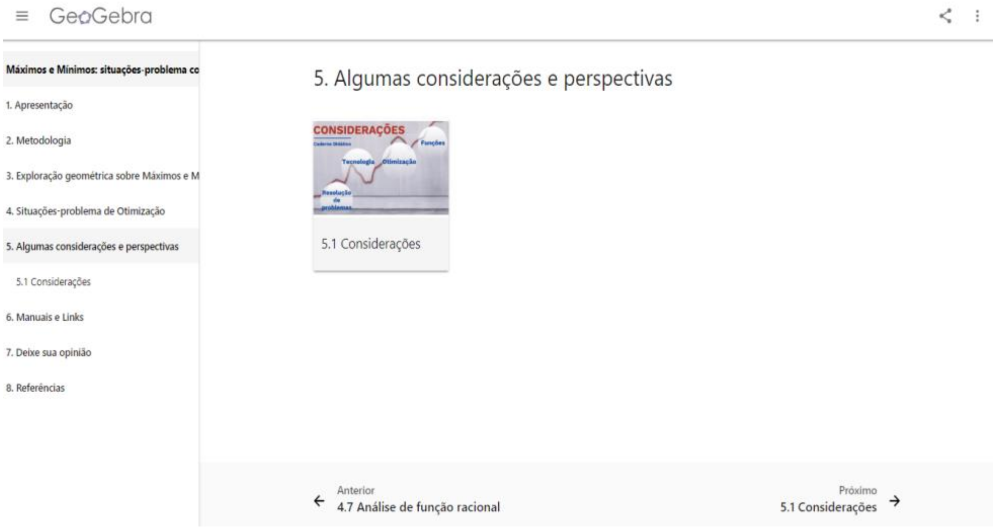
O **Problema 7** é disponibilizado também em PDF para o professor (Ver Apêndice 19).

O material '**Conversando com o professor**' também é disponibilizado em PDF (Ver Apêndice 20).

CAPÍTULO 5: ALGUMAS CONSIDERAÇÕES E PERSPECTIVAS

Nesse capítulo incluímos algumas de nossas considerações e perspectivas sobre o produto educacional, principalmente relacionadas as situações-problema experimentadas e analisadas na dissertação que dão suporte a esse produto. A Figura 42 ilustra a tela inicial do capítulo 5.

Figura 42 – Tela inicial do capítulo 5

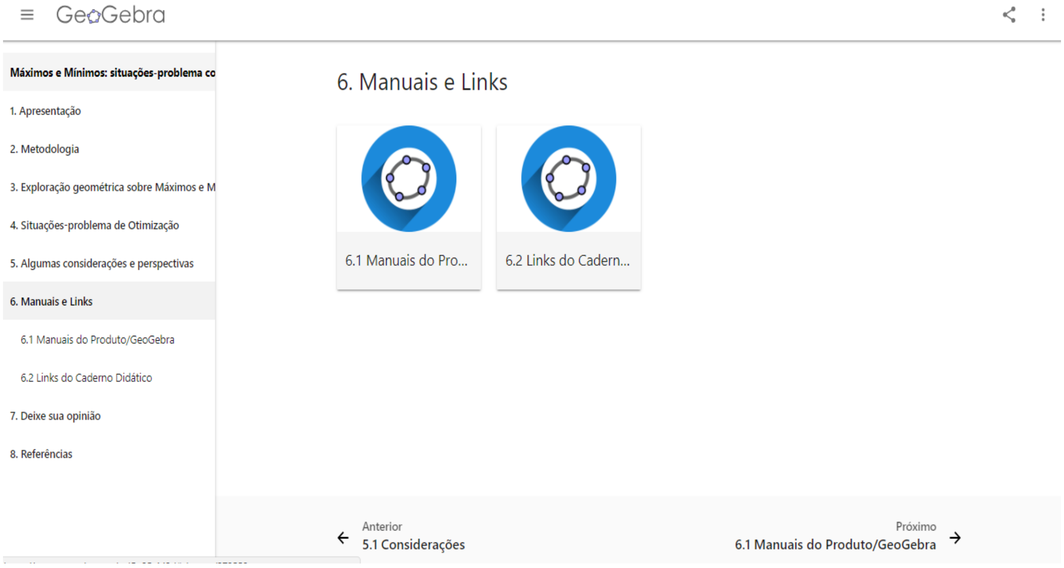


Fonte: a autora

CAPÍTULO 6: MANUAIS E LINKS

Esse capítulo é dividido em dois subitens: 6.1 Manuais do Produto/GeoGebra e 6.2 Links do Caderno Didático (Ver Figura 43 que ilustra a tela inicial do capítulo 6). O subitem 6.1 apresenta um PDF com as principais ferramentas e comandos necessários para manusear o Produto Educacional no GeoGebraBook, e outros materiais que servem como manual. O 6.2 apresenta o link de todos os aplicativos apresentados ao longo do Produto Educacional.

Figura 43 – Tela inicial do capítulo 6



Fonte: a autora

6.1 Manuais do GeoGebra

Para resolver os problemas propostos nesse Caderno Didático utilizando o GeoGebra é necessário que professor e aluno conheçam alguns comandos e ferramentas básicas do software. Para isso, construímos um pequeno manual para auxiliá-los, que está disponível em PDF (Ver Apêndice 21).

Além disso, deixamos outros manuais, tutoriais e vídeos que podem auxiliar. Aqui deixaremos o link do Manual do GeoGebra [1], Tutoriais [2] e páginas do Youtube sobre Curso de GeoGebra [3] [4] (Esses cursos não foram desenvolvidos pelo grupo do GeoGebra, nem pela autora deste trabalho).

[1] Disponível em: https://wiki.geogebra.org/pt/Manual Acessado em: 27 mar. 2018.

[2] Disponível em: http://wiki.geogebra.org/en/Tutorials Acessado em: 27 mar. 2018.

[3] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=0wz4UGD8b7k&list=PL ZJbXU8AYkTVUNxdrPPMNlwj-xKqLGMEd Acessado em: 27 mar. 2018.

[4] Disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=9-orPBR1TXo&list=PL8884F539CF7C4DE3 Acessado em: 27 mar. 2018.

6.2 Links do Caderno Didático

Os links estão apresentados na ordem que são utilizados pela primeira vez no Caderno Didático, conforme apresentado a seguir:

Nome	Disponível em:
Reta Tangente a Curva	https://ggbm.at/A9HZEWpe
Analisando o coeficiente angular da reta tangente	https://ggbm.at/gSdmff6D

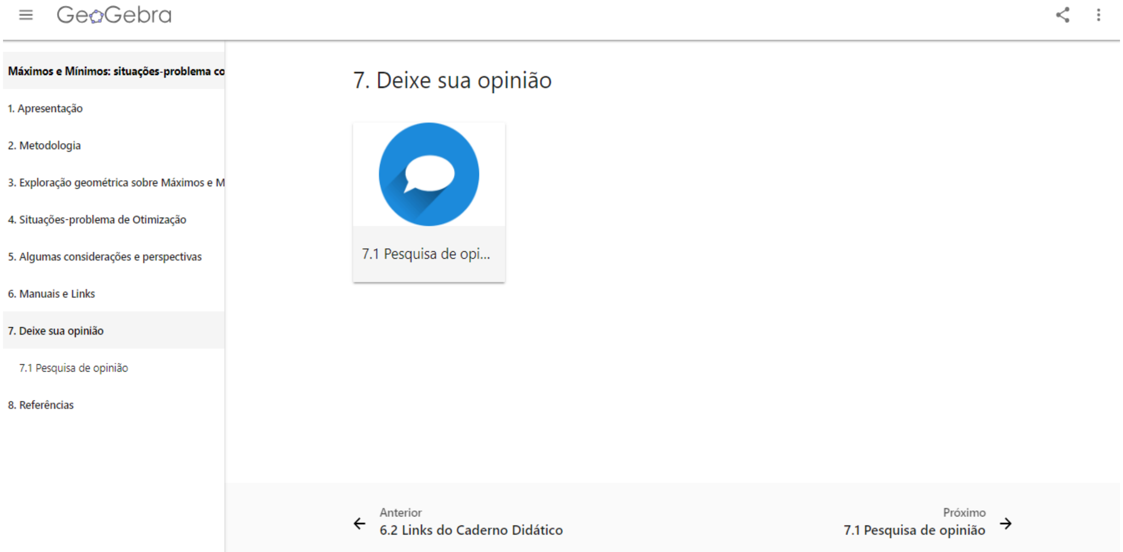
Analisando o gráfico da função derivada	https://ggbm.at/ajnmAxWR
Ensino Médio: Derivada e ponto de Máximo ou Mínimo	https://ggbm.at/gxCJCVvk
Teorema de Bolzano: encontrando raízes reais	https://ggbm.at/XtbtZ2as
Teste da Primeira Derivada - Máximos e Mínimos	https://ggbm.at/zkEUJGvZ
Simulações com o Teste da Primeira Derivada	https://ggbm.at/VeEWFWM4
Teste da Segunda Derivada - Concavidade - Máximo e Mínimos	https://ggbm.at/veZTcyeM
Simulações com Teste da Segunda Derivada	https://ggbm.at/XKKwp495
Área máxima da casa	https://ggbm.at/BSeh8kqS
Área máxima da casa - resolução	https://ggbm.at/EsWSPnrb
Área máxima da casa - refutações	https://ggbm.at/kshPWRaZ
Volume máximo da caixa	https://ggbm.at/tn7rmsgu
Volume máximo da caixa - resolução	https://ggbm.at/gTZBH6hV
Área de figuras usando barbante	https://ggbm.at/fKQfaZuE
Área de figuras usando barbante - resolução	https://ggbm.at/DcpzJXEw
Capacidade máxima da calha - seção retangular	https://ggbm.at/hPT5szHP
Capacidade máxima da calha -seção retangular – resolução	https://ggbm.at/tjfD4JPU
Capacidade máxima da calha - seção triangular	https://ggbm.at/QP2barJF
Capacidade máxima da calha - seção triangular – resolução	https://ggbm.at/MQcQ26sR
Capacidade máxima da calha - seção trapezoidal	https://ggbm.at/Xg6UwAjf
Capacidade máxima da calha - seção trapezoidal – resolução	https://ggbm.at/amZjMwwD
Capacidade máxima da calha - seção semicircular	https://ggbm.at/rszbmzjc
Capacidade máxima da calha – seção semicircular – resolução	https://ggbm.at/shfakpay
Capacidade máxima da calha - seção retângulo-circular	https://ggbm.at/YKscxk6E
Capacidade máxima da calha - seção retângulo-circular – resolução	https://ggbm.at/N8fKHXrm

O presente arquivo, referente ao Produto Educacional, também é disponibilizado em PDF no GeoGebraBook online.

CAPÍTULO 7: DEIXE SUA OPINIÃO

Nesse capítulo o usuário pode deixar comentários sobre o Produto Educacional. A Figura 44 ilustra a tela inicial do capítulo 7. A ideia de gerar esse capítulo que possibilita o usuário deixar sua opinião foi adaptada de Lemke (2017).

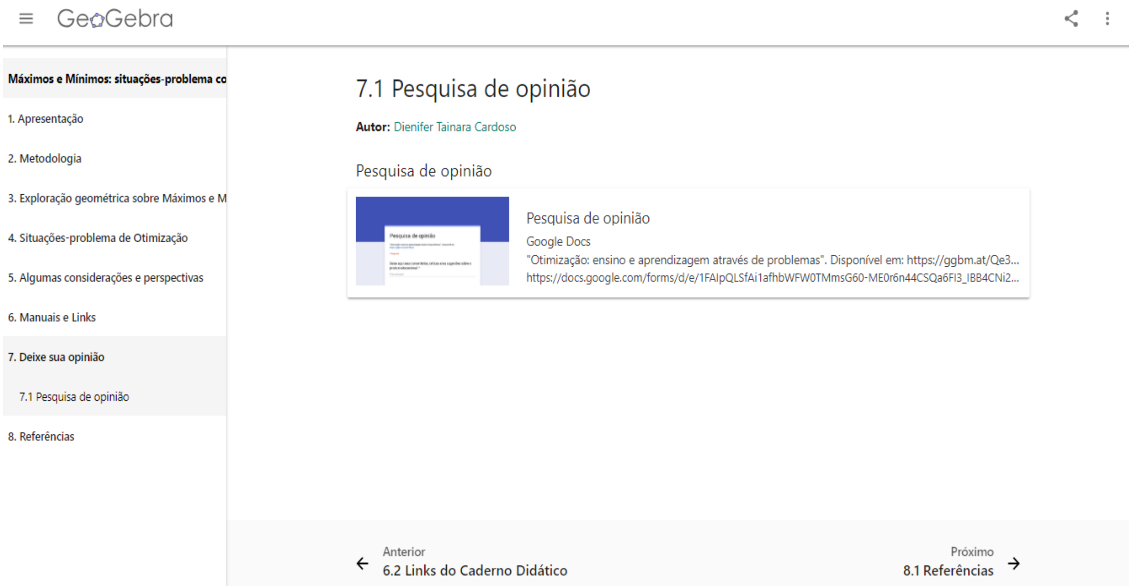
Figura 44 – Tela inicial do capítulo 7



Fonte: a autora

Ao clicar no subitem 'Pesquisa de opinião' abrirá uma página indicando onde deixar sua opinião, como ilustra a Figura 45.

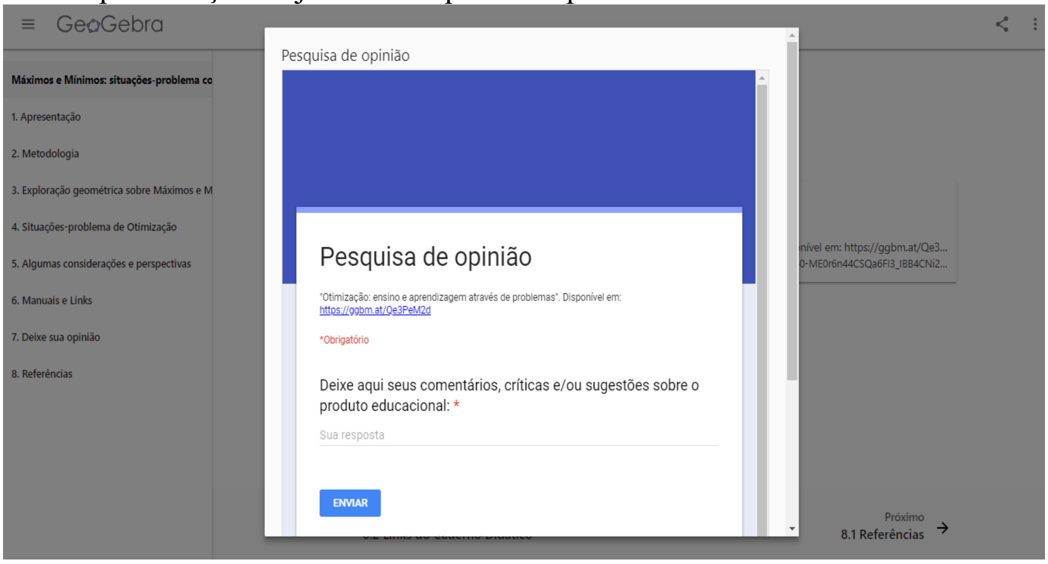
Figura 45 – Página de pesquisa de opinião



Fonte: a autora

Ao clicar sobre o ícone abrirá uma janela na qual o usuário pode escrever sua opinião e clicar em enviar (Ver Figura 46). A opinião será enviada ao e-mail da autora deste trabalho.

Figura 46 – Representação da janela ‘Pesquisa de opinião’

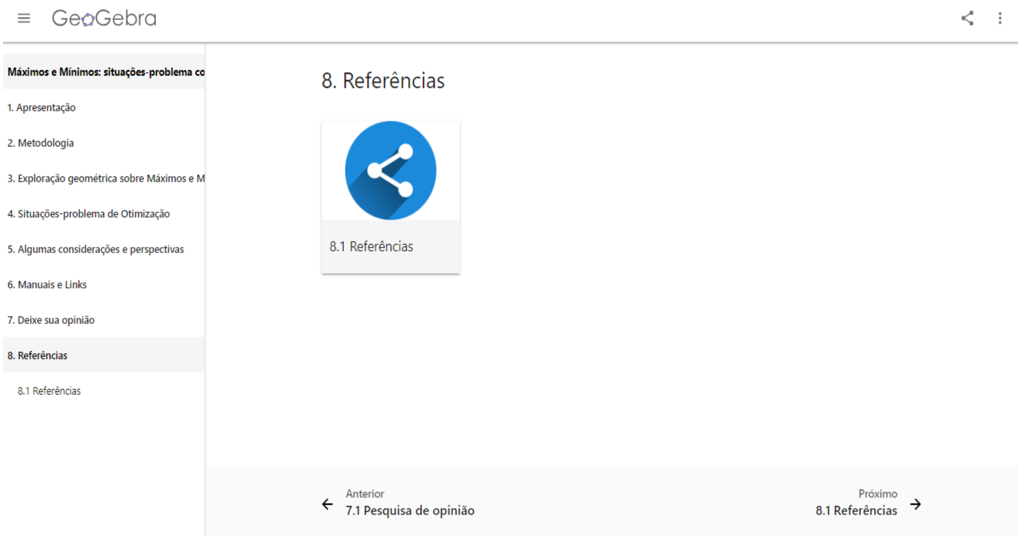


Fonte: a autora

CAPÍTULO 8: REFERÊNCIAS

O capítulo 8 apresenta todas as referências citadas ao longo da elaboração do Produto Educacional. A Figura 47 ilustra a tela inicial desse capítulo.

Figura 47 – Tela inicial do capítulo 8



Fonte: a autora

Ao clicar no ícone ‘Referências’ serão apresentadas todas as referências utilizadas no produto.

CONSIDERAÇÕES

A situação-problema ‘Área da casa’ do item 4.1 foi experimentada em diferentes níveis de Ensino: Ensino Médio, Mestrado em Ensino e Graduação (na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I). Na turma da Graduação, além da situação-problema do item 4.1, também foi experimentada a situação-problema ‘Volume da caixa’ do item 4.2. As sequências foram experimentadas em diferentes períodos, o que possibilitou que analisássemos os resultados obtidos durante a experimentação, para com isso realizar melhorias nas sequências. As atividades antes das experimentações podem ser consultadas na dissertação que se refere esse Produto Educacional, intitulada: Resolução de Problemas e o Software GeoGebra no Ensino e Aprendizagem de Máximos e Mínimos.

As principais contribuições oriundas dessas experimentações foram o aprimoramento das atividades propostas no que se referem a escrita da situação-problema, abordagem visual dos aplicativos (cores e valores de variáveis) e a implementação das perguntas a serem realizadas durante a resolução da situação-problema.

Os aplicativos disponibilizados durante a resolução, foram fundamentais para romper hipóteses e criar conjecturas. Durante a observação foi evidente o quanto o material dinâmico pode esclarecer dúvidas, ampliar a discussão referente as estratégias de resolução e fornecer dados relevantes sobre a situação-problema.

Esperamos que esse produto possa trazer contribuições para professores e alunos, mais especificamente no ensino e aprendizagem de conteúdo de Máximos e Mínimos. Os aplicativos foram desenvolvidos para facilitar a exploração de objetos matemáticos, tanto no Ensino Médio, quanto no Superior.

Esse Caderno Didático está sujeito a alterações quando necessário. As sugestões postadas, por usuários através do canal ‘Pesquisa de Opinião’ no Capítulo 7, podem colaborar para que o caderno receba melhorias. Assim, encorajamos os professores a utilizarem/adaptarem as sequências propostas e compartilharem conosco os relatos de experiências e/ou sugestões de melhorias.

REFERÊNCIAS

ALLEVATO, Norma S. Gomes; ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática: por que Através da Resolução de Problemas? In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTILIN, Andressa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática. Jundiaí: Paco Editorial, 2014, p. 35 – 52.

CARDOSO, Dienifer Tainara. **Resolução de problemas e o software GeoGebra no ensino e aprendizagem de Otimização**. Dissertação (Mestrado). Universidade do Estado de Santa Catarina. 2018. 2018, 155 f.

CARDOSO, Dienifer Tainara. **Teorema Fundamental do Cálculo:** uma abordagem dinâmica. Monografia (Graduação). Universidade do Estado de Santa Catarina. 2016, 132 f.

DANTAS, Sérgio. **Estudo do volume máximo de uma caixa**. 2015. Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Z2k8KRSy. Acessado em: 14 de março de 2018.

GEOGEBRA, 2018. Disponível em: <https://www.geogebra.org/>. Acesso em: 25 mai. 2018.

HOFFMANN, Laurence D; BRADLEY, Gerald L. **Cálculo**: um curso moderno e suas aplicações**.** 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC. 2002.

YANG, Jerry. 2016. **Bolzano's Theorem.** Disponível em: https://www.geogebra.org/m/Rb9VJVH8. Acessado em: 07 de maio de 2018.

LEMKE, Raiane. **F2V:** recursos dinâmicos para Cálculo. Disponível em: < https://ggbm.at/GdZ9wzW8>. Acesso em 01 jun. 2018.

Máximos e Mínimos: situações-problema com recursos dinâmicos. Disponível em: <https://ggbm.at/Qe3PeM2d> Acesso em: 25 mai. 2018.

MENINO, Fernanda dos Santos; ONUCHIC, Lourdes de La Rosa. O problema da calha e o uso da metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação de Matemática através da resolução de problemas nos cursos de Engenharia. In: ONUCHIC, Lourdes de La Rosa; JUNIOR, Luiz Carlos Leal; PIRONEL, Márcio. (Org.). **Perspectivas para Resolução de Problemas**. São Paulo, Ed. Livraria da Física, 2017.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes. Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema,** São Paulo, v. 25, n. 41, 2011, p. 73-98.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa. A resolução de problemas na educação matemática: onde estamos? E para onde iremos?. **Revista Espaço Pedagógico** – Universidade de Passo Fundo, Passo Fundo, v. 20, n. 1, 2013, p. 88-104.

SCHROEDER, Thomas L.; LESTER JUNIOR, Frank K. Developing Understanging in Mathematics via Problem Solving. In: P. R. Trafton (Ed.) New Directions for Elementar School Mathematics. **National Conuncil of Teachers os Mathematics**, Reston, VA:NCTM, 1989, p. 31-42.

STEWART, James. **Cálculo.** Vol 1. 6ª ed. São Paulo: Cengage Learning, 2011.

TRAVASSOS, Maria Lúcia Galvão Leite; ARAIUM, Raquel; MORAIS, Rosilda dos Santos; SOUZA, Tatiane da Cunha Puti. Números e Operações. In: ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes; NOGUTI, Fabiane Cristina Hopner; JUSTILIN, Andressa Maria. **Resolução de Problemas**: teoria e prática.Jundiaí: Paco Editorial, 2014.

APÊNDICES

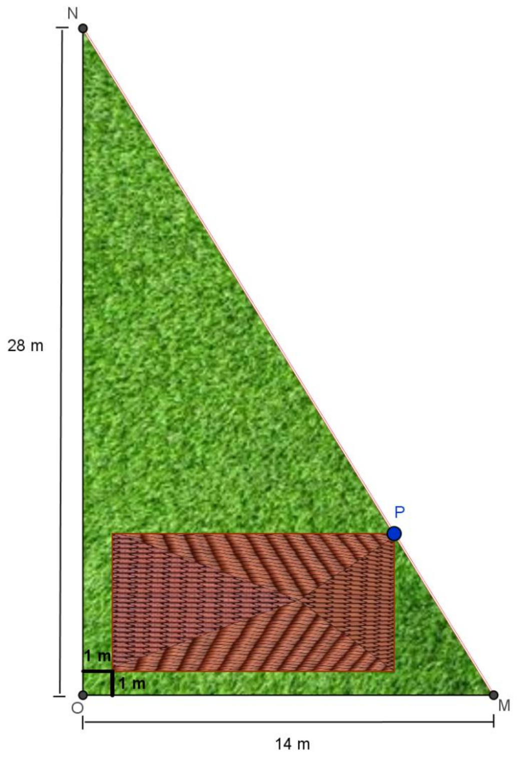
Apêndice 1 - Problema 1

Aluno(s):
Data:

Problema – Área máxima da casa

José ganhou como herança um terreno triangular, conforme Figura 1, e deseja construir uma casa retangular com a maior área possível. Entretanto, ele precisa respeitar algumas restrições impostas pelo Plano Diretor de sua cidade para a construção. Algumas das restrições são que o canto indicado pelo ponto P fique sobre a lateral MN do terreno e seja um dos cantos da casa, e que as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados.

Figura 1 – Construção de uma casa em um terreno triangular



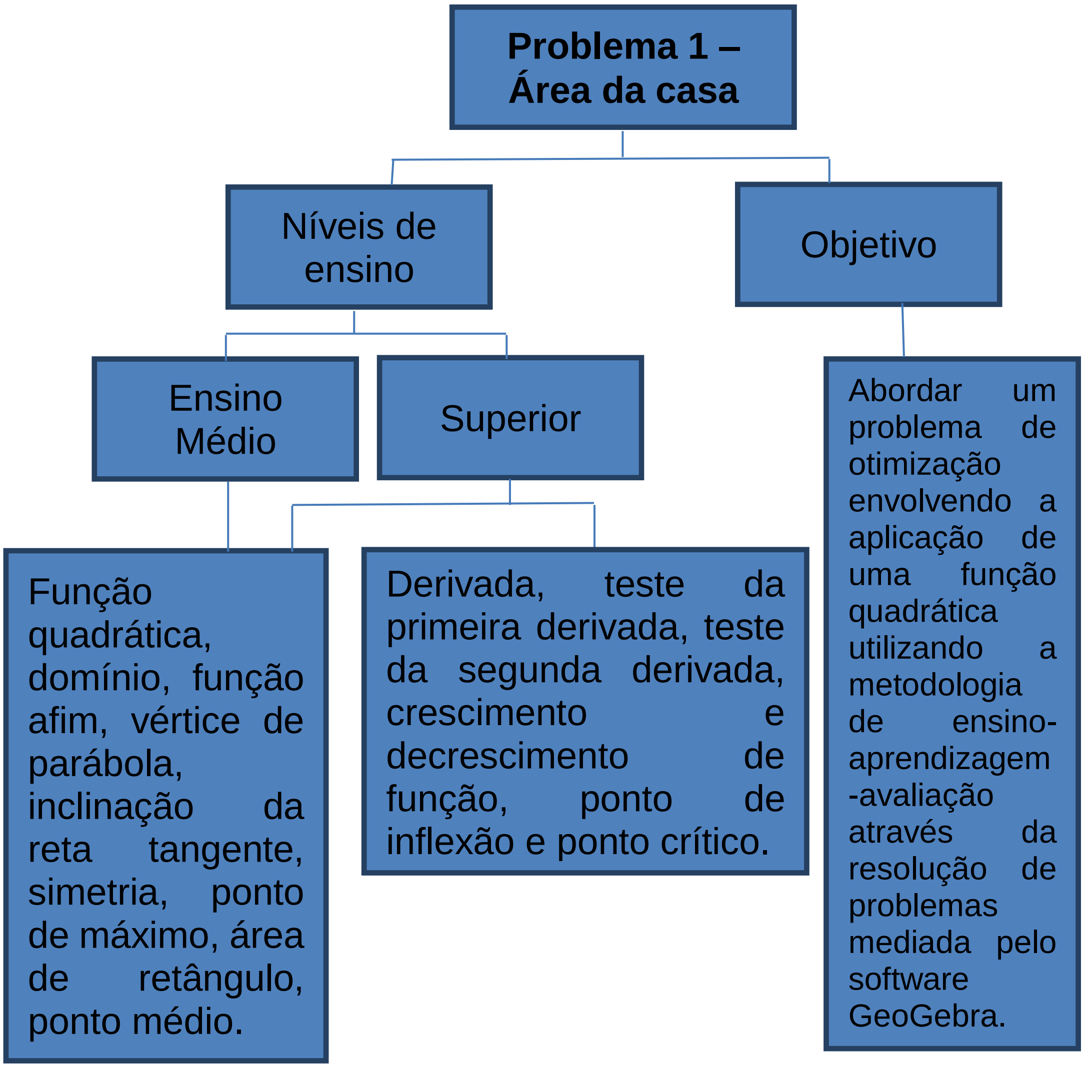
Fonte: Adaptada de Cardoso (2016)

Ajude José encontrar as medidas da casa, que deverá construir, para que a área dela seja máxima.

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

Apêndice 2 – Conversando com o professor

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

Inicialmente é conveniente que o professor estipule um tempo para a resolução do problema.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **‘Aplicativo 01 – primeiro momento’** em anexo. Para isso, o professor pode enviar o link ‘https://ggbm.at/BSeh8kqS’ por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

O professor deve estar preparado para conferir estratégias de resolução não necessariamente ligadas ao conteúdo de otimização, como por exemplo, conceitos de Geometria, Trigonometria ou dobradura (essas estratégias estão presentes na aplicação do trabalho de Cardoso (2018)).

Durante a resolução do problema, caso os alunos estejam discutindo a possibilidade de o valor máximo da área da casa ser o ponto médio do triângulo OMN, o professor poderá utilizar o arquivo **'Aplicativo 01 - refutações'** em anexo na página do GeoGebraBook para garantir isso visualmente, depois o professor pode demonstrar algebricamente. Porém, como até esse momento os alunos podem não ter concluído a resolução, sugere-se que o professor feche a 'Janela de visualização 2' e 'Janela de visualização 3D'.

Enquanto o professor observa e media, o professor pode fazer as seguintes questões se achar conveniente:

- Existe alguma dependência entre as dimensões da casa?
- Vocês acham conveniente representar a figura sobre um plano cartesiano? Se sim, o que a reta MN pode representar em relação ao conteúdo de funções já visto?
- É possível plotar valores no plano cartesiano considerando a dependência da base com a altura? (Nesse momento o professor poderá auxiliar os alunos a usarem o software GeoGebra para plotar os pares ordenados).
- Qual o comportamento desses pares ordenados? Que tipo de figura eles sugerem?
- Existem diferentes construções com a mesma área?
- Matematicamente pode-se construir uma lei de formação com esses dados?
- Qual é a função?
- Essa função apresenta pontos extremos? O que ele(s) significa(m)?
- Como encontrá-los?

Obs.: Essas questões devem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta e então explorar o aplicativo **'Aplicativo 01 – segundo**

momento’ em anexo. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie pelo menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Por fim, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que o professor utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebraBook, bem como, o **‘Problema 1 - generalização’,** em anexo, que visa generalizar o problema da área máxima da casa. Para isso, o professor pode utilizar o arquivo em PDF e também o aplicativo ‘**Aplicativo 01 - refutações’,** já citado. Outra sugestão é que o professor instigue os alunos a resolver o seguinte problema:

> Um retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e localizado no primeiro quadrante tem um vértice na origem, um vértice sobre o eixo x , um vértice sobre o eixo y e o quarto vértice sobre a reta $2x + y = 100$. Qual a área máxima de tal retângulo?

O professor pode solicitar que os alunos construam a representação desse problema no GeoGebra dinamicamente. Os alunos deverão perceber que o apesar de mudar o contexto do problema em relação ao Problema 1, as estratégias de resolução podem ser as mesmas.

Bom trabalho!

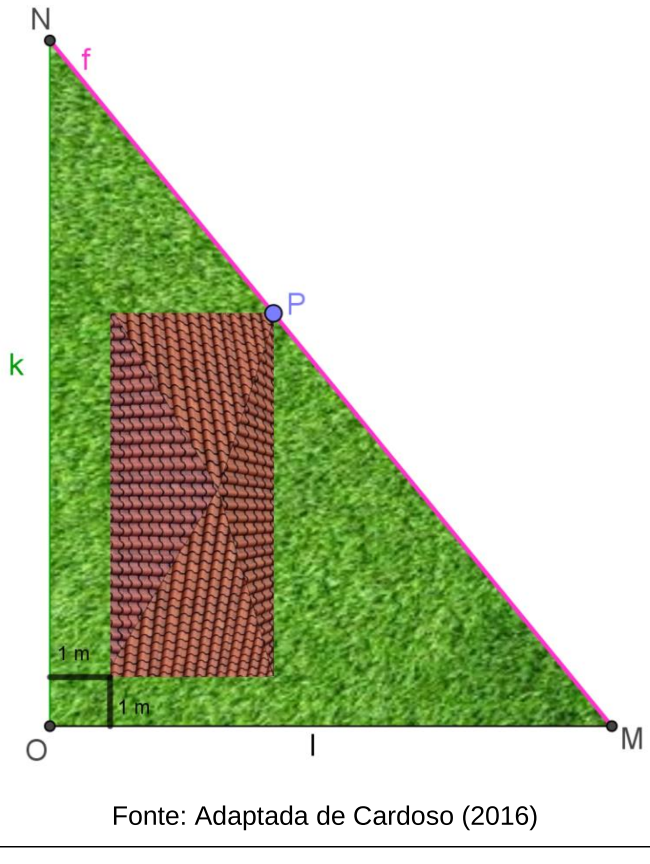
Apêndice 3 – Generalização do Problema 1

Aluno(s):
Data:

Problema – Generalização do problema da área da casa

Agora que você já resolveu o problema para a situação específica do caso de José, generalize-o considerando as mesmas restrições anteriores: o canto indicado pelo ponto P deve ficar sobre a lateral MN do terreno e ser um dos cantos da casa, e as laterais da casa, paralelas aos lados OM e ON do terreno, devem ficar a 1m de distância desses lados. A partir disso, considere agora que o lado ON vale $\boldsymbol{k}$ e o lado OM vale $\boldsymbol{l}$, conforme Figura 2, e represente algebricamente o valor máximo da casa.

Figura 2 – Construção de casa retangular em terreno triangular qualquer



Fonte: Adaptada de Cardoso (2016)

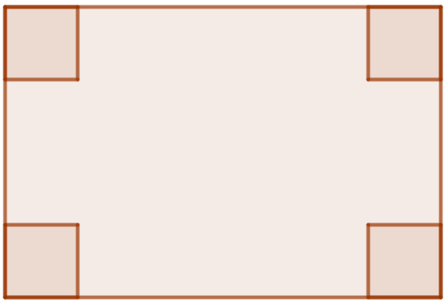
Apêndice 4 – Problema 2

Aluno(s):
Data:

Problema – Volume da caixa

Dada uma folha retangular, construa uma caixa, sem tampa, cujo volume seja máximo. Construa essa caixa, usando as dimensões da folha retangular dada, após serem cortados quadrados dos cantos dessa folha, conforme Figura 1.

Figura 1 – planificação da caixa



Fonte: a autora

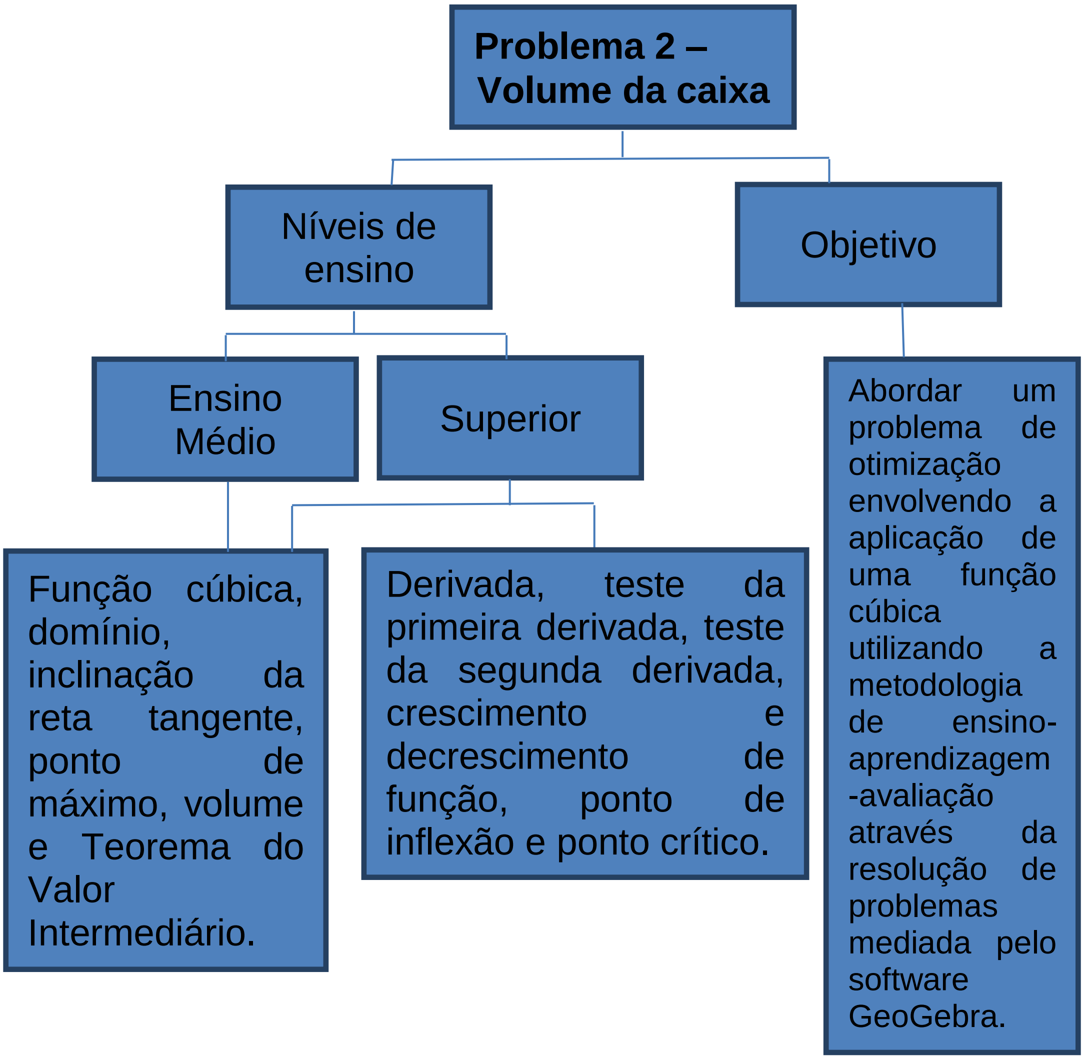
Quais são as dimensões da caixa para que o seu volume seja o maior possível? Qual o valor desse volume?

Fonte: adaptado de Travassos et al (2014)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

Apêndice 5 – Conversando com o professor

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

Inicialmente é conveniente que o professor estipule um tempo para a resolução do problema.

Para aplicar esse problema o professor pode entregar uma folha sulfite aos alunos e pedir que eles usem essa medida como base. Ou ainda, caso o professor prefira, podem ser disponibilizados diferentes tamanhos de folhas para os alunos, como sugere Travassos *et al* (2014).

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo

Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **'Aplicativo 02 – primeiro momento'** em anexo no GeoGebraBook. Para isso, o professor pode enviar o link 'https://ggbm.at/tn7rmsgu' por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Enquanto o professor observa e media, o professor pode fazer as seguintes questões se achar conveniente (TRAVASSOS *et al*, 2014):

- Cortando quadrados dos cantos da folha, qual a figura que pode ser formada? (espera-se que os alunos percebam que é uma caixa, se não, o professor poderá simular o levantamento de uma das abas).
- Considerando a base da caixa a face oposta à tampa, se ela existisse, quais as dimensões (comprimento, largura) da base da caixa?
- Qual a área da base da caixa?
- Há alguma restrição para a medida dos lados dos quadrados, isto é, há um limite máximo ou mínimo para essas medidas?
- O lado do quadrado recortado representa que dimensão da caixa?
- Existe alguma dependência entre a medida do lado do quadrado e o volume da caixa?
- Que função representa essa situação?
- Como encontrar o(s) extremo(s) em seu domínio?
- O que é possível observar para valores de $f(x)$, no domínio da função, em torno de um possível ponto de máximo? (Caso a turma seja do Ensino Médio, a partir daqui o professor pode intuitivamente apresentar o Teorema do Valor Intermediário).

Obs.: Essas questões devem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Inicialmente o professor pode ter receio em aplicar essa atividade ao Ensino Médio, todavia, o Teorema do Valor Intermediário, ou ainda, o Teorema de Bolzano que é um caso particular desse teorema, pode auxiliar de modo prático os alunos a encontrarem o valor máximo do volume da caixa (em seu domínio), sem que o professor necessite explorar formalmente o conteúdo de derivadas. Para essa abordagem é importante o uso de uma calculadora, ou o uso da calculadora do próprio software GeoGebra.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta e então explorar o aplicativo **‘Aplicativo 02 – segundo momento’** em anexo. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie ao menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Por fim, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que o professor utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebraBook, bem como, o **‘Problema 2 - generalização’,** em anexo, que visa generalizar o problema do volume máxima da caixa. Para isso, o professor pode utilizar o arquivo em PDF e também o aplicativo ‘**Aplicativo 02 – segundo momento’,** que permite explorar diferentes dimensões para uma folha retangular.

Essa atividade foi aplicada a uma turma de Cálculo Diferencial e Integral I e relatada em Cardoso (2018).

Bom trabalho!

Apêndice 6 – Generalização do Problema 2

Aluno(s):
Data:

Problema – Generalização do volume de uma caixa

Agora que você já resolveu o problema do volume da caixa para as medidas específicas, considere uma folha retangular de medidas a e b quaisquer. Recorte quadrados iguais dos cantos dessa folha. As abas que sobram são então dobradas para cima de modo a formar uma caixa sem tampa, como no problema já resolvido. A partir disso, generalize os cálculos de modo a representar algebricamente a função volume da caixa e as dimensões que maximizam o volume.

Apêndice 7 – Problema 3

Aluno(s):
Data:

Problema – barbante:

A professora de João propôs um trabalho para a turma dele no qual cada aluno deveria propor um problema usando os conhecimentos de funções. João pensou em explorar a construção de figuras geométricas que maximizam a área. Para a construção das figuras ele dispunha de um barbante de 10 decímetros de comprimento. Assim, ele pensou que com esse barbante ele poderia:

A) construir um quadrado;
B) construir uma circunferência;
C) cortar em dois pedaços (não necessariamente de mesmo tamanho) de modo que um dos pedaços fosse usado para construir um quadrado e o outro para construir uma circunferência.

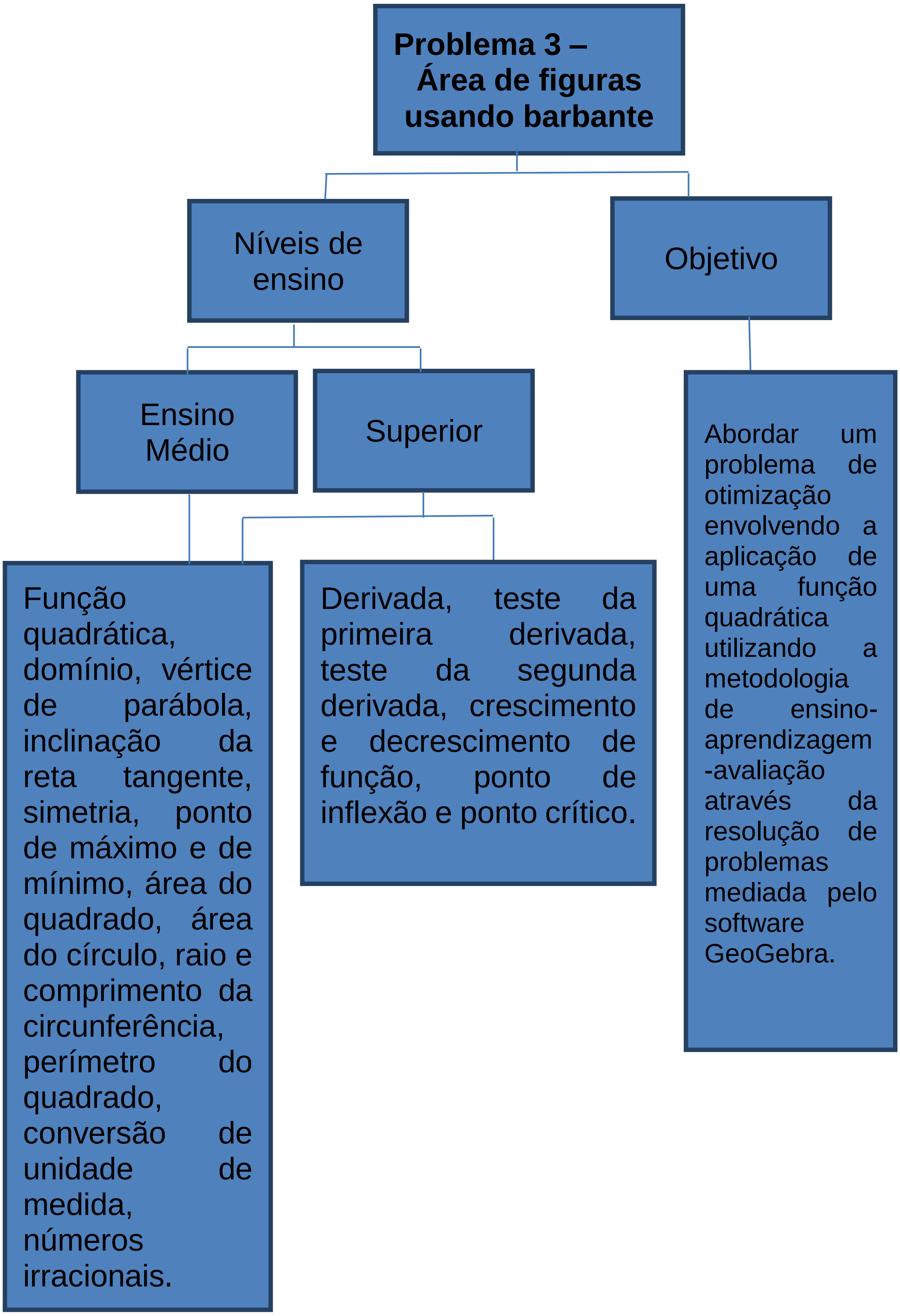
Em qual situação João conseguirá a área máxima? E a área mínima? Resolva o problema proposto por João criticamente, apontando os conceitos envolvidos e as potencialidades/deficiências do problema.

Fonte: adaptado de Santos e Bianchini (2002)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

Apêndice 8 – Conversando com professor

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

Inicialmente é conveniente que o professor estipule um tempo para a resolução do problema.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **'Aplicativo 03 – primeiro momento'** em anexo. Para isso, o professor pode enviar o link 'https://ggbm.at/fKQfaZuE' por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive. Ademais, o professor pode levar um pedaço de barbante para cada grupo ou aluno, para que além do aplicativo, o aluno possa manusear o objeto concreto.

O aplicativo irá auxiliar os alunos na resolução e surgimento de possíveis estratégias. Todavia, o professor deve estar ciente que uma das tentativas de resolução pode ser por tentativa e erro. Além disso, erros por falta de atenção e dificuldades com a Matemática Básica podem surgir, já que o problema trabalha com diferentes operações. Logo, o professor deve estar atento para auxiliá-los e permitir que eles percebam seus erros, caso ocorram.

Talvez seja conveniente o professor solicitar que os alunos tragam uma calculadora no dia da aplicação para agilizar os cálculos de maximização e minimização, ou utilizem a calculadora do próprio software GeoGebra.

Enquanto o professor observa e media, o professor pode fazer as seguintes questões se achar conveniente:

- O que é perímetro de uma figura plana?
- Quantos lados têm um quadrado? Qual a medida de cada lado?
- Como podemos calcular a área de um quadrado? E de um círculo?
- Como calculamos a medida do comprimento de uma circunferência?
- Podemos somar as áreas obtidas pelo quadrado e pelo círculo?
- Se variarmos os tamanhos disponibilizados para construir cada uma das figuras, a soma das áreas irá mudar ou será ser sempre a mesma, já que o tamanho do barbante utilizado é fixo?
- Caso o aluno perceba que a soma irá variar, pergunte: a variação dessa área depende de que valor?
- Essa dependência te permite escrever a lei de formação de uma função?

Obs.: Essas questões devem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta e então explorar o aplicativo **‘Aplicativo 03 – segundo momento’** em anexo. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie pelo menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Por fim, professor, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebraBook.

Bom trabalho!

Apêndice 9 – Problema 4

Aluno(s):
Data:

Problema – Viação De Ônibus:

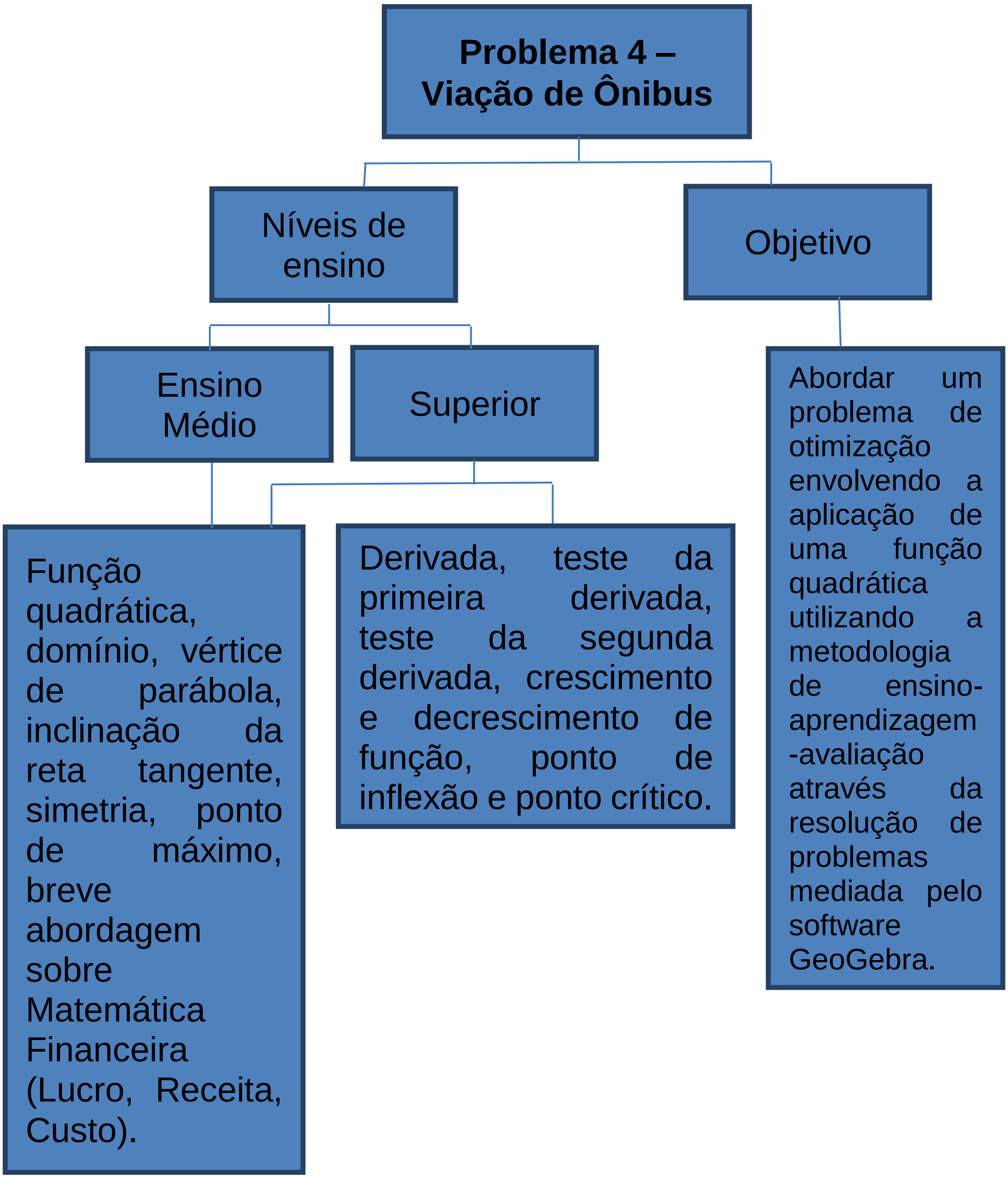
Em uma viagem de formatura do Ensino Médio, há capacidade para 66 pessoas no ônibus que será fretado. A viação de ônibus cobra R$200,00 por pessoa quando todos os lugares são ocupados. Se existirem lugares não ocupados, ao preço de cada passagem será acrescida a importância de R$4,00 por cada lugar não ocupado. Com o objetivo de otimizar o faturamento da viação, é importante que ela tenha conhecimento sobre qual o número ideal de passageiros. Diante disso, ajude a viação a analisar e calcular seu melhor faturamento.

Fonte: adaptado de Dante (2004)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

Apêndice 10 – Conversando com o professor

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

Inicialmente é conveniente que o professor estipule um tempo para a resolução do problema.

Fica a critério do professor antes da atividade ou durante, fazer uma breve abordagem sobre o que é receita, custo e lucro.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **software GeoGebra**. Para isso, o professor pode utilizar tablets ou computadores. Nessa atividade não abordamos um aplicativo pronto para o aluno utilizar. Nesse problema o GeoGebra pode ser utilizado para o próprio aluno construir gráficos, realizar cálculos, evidenciar valores, etc.

Os alunos poderão principalmente utilizar estratégias analíticas, gráficas ou desenhos. No desenvolvimento analítico do problema o professor deverá ficar atento pois os alunos poderão ter dificuldades em transpor as informações do enunciado para a linguagem matemática.

Enquanto o professor observa e media, o professor pode fazer as seguintes questões se achar conveniente (instigue os alunos a utilizarem o software GeoGebra na resolução do problema):

- Se todos os lugares estivessem ocupados, qual o faturamento obtido pela companhia?
- Se o número de lugares não ocupados fosse 3 (por exemplo), qual o faturamento obtido? E se fosse 10? Que cálculo você fez ou pode fazer para calcular esse(s) faturamento(s)?
- Nesse cálculo o que está variando? Plote suas respostas na tela do GeoGebra.
- Existe alguma dependência entre o valor que está variando e o resultado do faturamento?
- Seria possível relacionar isso ao conteúdo de funções?
- Qual o número máximo ou mínimo de lugares vagos que pode existir? Sendo assim, qual o domínio da função?
- Essa função apresenta pontos extremos? O que ele(s) significa(m)?
- Existe simetria? Como encontrar o faturamento máximo?

Obs.: Essas questões podem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta explorando o software GeoGebra. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie pelo menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Por fim, professor, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebra Book.

Bom trabalho!

Apêndice 11 – Problema 5

Aluno(s):
Data:

Problema – Cerca:

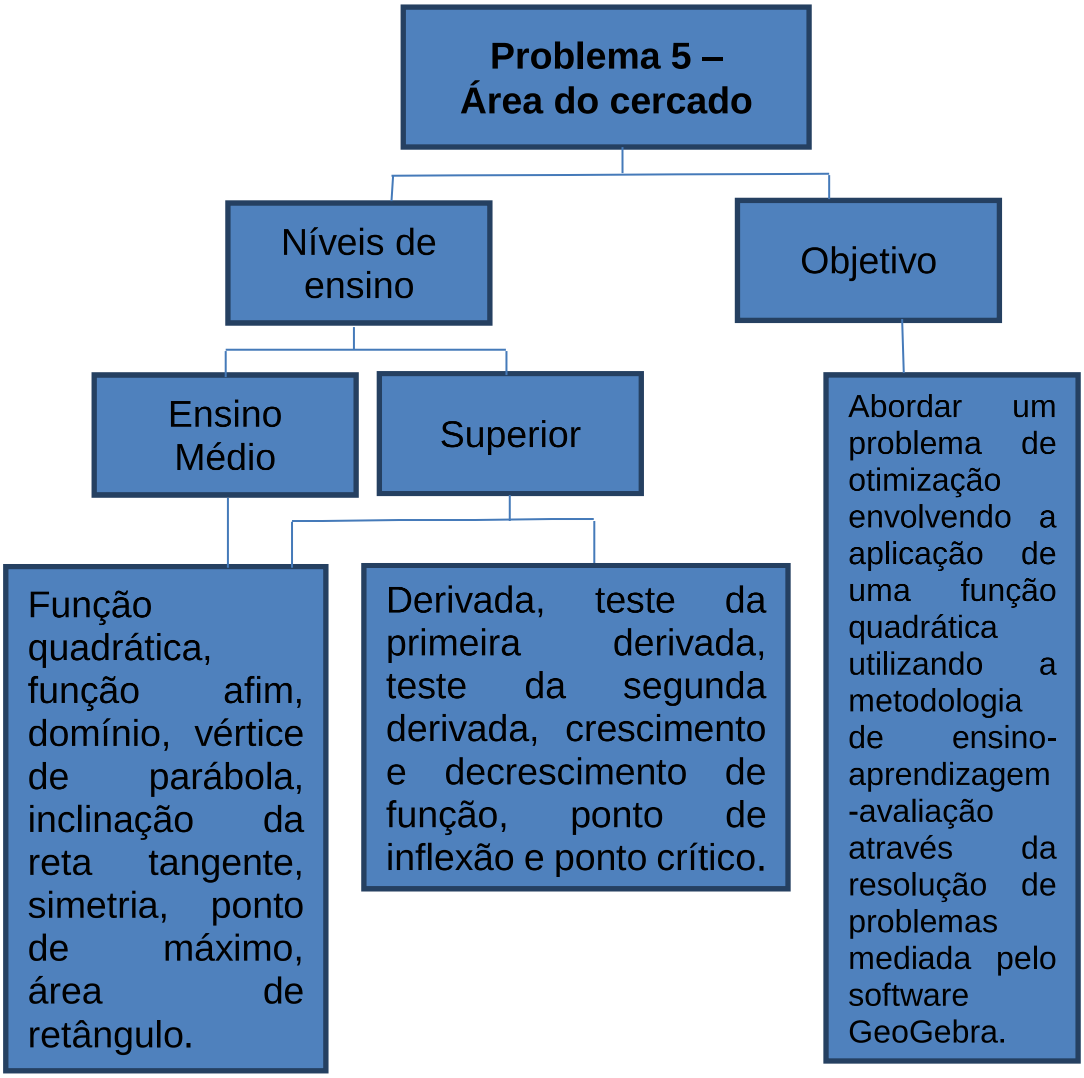
Suponha que você queira cercar uma área retangular no seu terreno, com tela de arame, que será reservada a uma horta. Para economizar nessa construção, você aproveita um canto perpendicular do muro no seu terreno. Assim, apenas restam serem cercados dois lados para obter o espaço para a horta, porém você tem um orçamento de R$ 150,00 para investir na cerca da horta. Após realizar uma pesquisa num site de comparação de preços verifica-se que o menor preço da tela é aproximadamente R$ 18,20 por metro numa loja próxima de sua casa. Pensando em otimizar esse espaço, verifique quais devem ser as medidas de cada lado da horta.

Fonte: adaptado de Stewart (2011)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

Apêndice 12 – Conversando com o professor

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

Inicialmente é conveniente que o professor estipule um tempo para a resolução do problema.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **software GeoGebra**. Para isso, o professor pode utilizar tablets ou computadores. Nessa atividade não abordamos um aplicativo pronto para o aluno utilizar. Nesse problema o GeoGebra pode ser utilizado para o próprio aluno construir gráficos, realizar cálculos, evidenciar valores, e construir uma representação para o problema.

Professor, uma das maiores dificuldades dos alunos poderá ser transpor as informações do enunciado para a linguagem matemática. Além disso, uma das tentativas de resolução poderá ser tentativa e erro para alcançar em valor aproximado da área máxima.

Enquanto o professor observa e media, o professor pode fazer as seguintes questões se achar conveniente (instigue os alunos a utilizarem o software GeoGebra na resolução do problema):

- Você está disposto a gastar R$ 150,00 de cerca. Considerando que o valor da cerca seja em médio R$ 18,20, qual a metragem total que você consegue comprar?
- De quantas diferentes formas você pode utilizar essa cerca para cercar uma área retangular? (ajude o aluno a construir uma representação desse problema no GeoGebra).
- Por exemplo, se você utilizar a lateral sendo 3 m e o comprimento 5 m, qual a área do cercado? E se fosse 1 m de largura e 7 de comprimento? E se fosse um quadrado? (permita que o aluno utilize as ferramentas de Geometria que o software disponibiliza para representar e calcular esses casos).
- Plote os valores de largura (ou comprimento) e a respectiva área, usando o GeoGebra.
- Existe alguma dependência entre a medida do(s) lado(s) em relação a área do cercado?
- Essa dependência descreve uma função?
- Existem restrições quanto aos valores utilizados? Quais? Descreva o domínio da função.
- Plote a função encontrada no GeoGebra.
- Essa função apresenta pontos extremos? O que ele(s) significa(m)?
- Como encontrá-los?
- Existe simetria?

Obs.: Essas questões devem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta explorando o software GeoGebra. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie pelo menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Por fim, professor, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebraBook.

Bom trabalho!

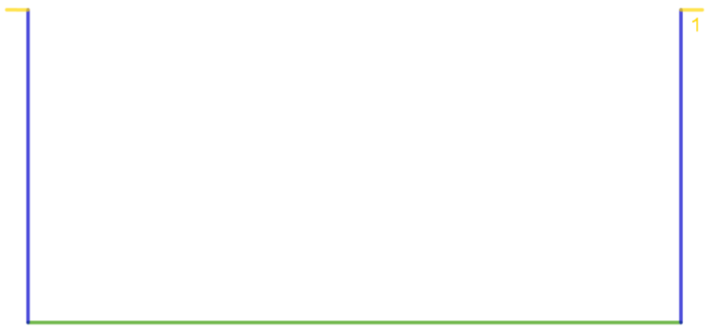
Apêndice 13 – Problema 6.1

Aluno(s):
Data:

Problema – Calha Seção retangular

Uma chapa galvanizada retangular, com 3 m de comprimento e 62 cm de largura, será dobrada em formato de seção retangular de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Deseja-se obter as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade. Assim como mostra a Figura 1, considere uma 'dobra' de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação.

Figura 1 – Planificação da calha seção retangular



Fonte: a autora

Fonte: adaptado de Menino e Onuchic (2017)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

Apêndice 14 – Conversando com o professor

MATERIAL PARA O PROFESSOR
Problema da calha

Nível de ensino: Ensino Superior

Objetivo: Abordar problemas de otimização envolvendo a aplicação de função quadrática utilizando a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas mediada pelo software GeoGebra.

O Problema da Calha permite que o professor introduza ou reforce muitos conceitos e conteúdos matemáticos (MENINO; ONUCHIC, 2017). Pode inclusive ser aplicado como um teste diagnóstico no início da disciplina de Cálculo e depois ser retomado no conteúdo de Máximos e Mínimos.

Esse problema já foi aplicado e relatado por Menino e Onuchic (2017). Segundo as autoras os resultados foram promissores e gratificantes. Aproveitaremos de suas contribuições para compor esse material ao professor.

Esse problema é composto por 5 casos, e **devem ser entregues um de cada vez** aos alunos para que explorem todas as estratégias e conceitos envolvidos em cada momento. Os conteúdos e conceitos que podem ser explorados pelo professor durante a aplicação são os seguintes para cada caso:

Caso 1 – seção retangular: Medidas de comprimento, área e volume. Cálculo de perímetro. Conversão de unidades. Princípio de Cavalieri. Equação. Conceito de Função. Função quadrática. Domínio. Gráfico. Valores máximo e mínimo. Vértice. Raízes.

Caso 2 – seção triangular: Área de triângulo. Trigonometria – Seno, cosseno e tangente.

Caso 3 – seção trapezoidal: Perímetro e Área do trapézio. Ângulos suplementares e complementares. Volume.

Caso 4 – seção semicircular: Comprimento da circunferência. Área do círculo. Volume do cilindro.

Caso 5 – seção retângulo-circular: Perímetro da figura formada pelo retângulo e ¼ da circunferência. Área da figura. Volume. Derivada. Cálculo de máximos e mínimos.

Professor, é importante que os problemas sejam entregues aos alunos nessa ordem, para que ocorra a construção do conhecimento de maneira crescente. E além disso, é interessante que os problemas sejam aplicados em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

É conveniente que seja estipulado um tempo para a resolução do problema logo no início da aplicação.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **‘Aplicativo 06 – Caso 1 – primeiro momento’** em anexo. Para isso, o professor pode enviar o link ‘https://ggbm.at/hPT5szHP’ por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Durante a aplicação do **Caso 1,** o professor pode mediar a interpretação dos alunos de modo a se questionarem se as medidas dos lados interferem na capacidade da calha. Com o aplicativo em mãos, peça que os alunos analisem os respectivos valores obtidos quando se movimenta a medida da lateral da calha. Faça perguntas, como:

- A capacidade da calha muda conforme variam as medidas da lateral, ou será sempre o mesmo, pois a chapa fornecida tem tamanho fixo?
- Existe alguma dependência entre as medidas que formam a calha?
- Quanto maior a lateral, maior a capacidade?
- Quanto maior a base, maior a capacidade?
- Plote os valores que observa em um gráfico. O que está acontecendo?
- Como descrever algebricamente essa função?
- Qual seu domínio?
- Como obter o máximo da capacidade dessa calha conhecendo sua função área?
- O que indica esse valor encontrado?

Professor, permita que os alunos percebam que a capacidade da calha está relacionada a sua área máxima, pois o comprimento da calha é constante.

Os alunos concluirão uma função quadrática e provavelmente usarão os conhecimentos sobre vértice de parábola para encontrar o valor máximo da área, e por fim a capacidade máxima. Aí fica a critério do professor iniciar com o conceito de Máximos e Mínimos com derivada a partir desse caso, ou aguardar que os alunos se questionem quais os conceitos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I podem ser explorados no problema (isso se a atividade não estiver sendo proposta como um pré-teste).

O **Caso 2** possibilita explorar diferentes conceitos da trigonometria. Inicialmente, após entregar o problema aos alunos, o professor pode disponibilizar o ‘**Aplicativo 06 – caso 2 – primeiro momento’** aos alunos. Para isso, o professor pode enviar o link ‘https://ggbm.at/QP2barJF’ por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Professor, provavelmente os alunos tentarão calcular a área do triângulo usando a metade do produto entre base e a altura. Porém, o professor deve instiga-los a perceberem que nesse caso o que está variando é o ângulo, e que assim necessitamos de uma fórmula em que a altura seja vista em termos desse. O professor pode permitir que eles façam uma pesquisa, usem seus conhecimentos prévios e por fim, o professor, se necessário, explore as três fórmulas conhecidas para calcular a área de um triângulo, que são a tradicional, trigonométrica e Heron, respectivamente:

$$A = \frac{b.h}{2} \qquad A = \frac{1}{2}.a.b.sen\theta \qquad A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

A partir disso, é conveniente o professor utilizar os conceitos sobre a função Seno e as relações trigonométricas no Ciclo, para relembrar sobre os limites da função Seno. Com isso, permitir que os alunos percebam que o máximo da função é quando o ângulo θ vale 90°.

Visto que os alunos já verificaram no Caso 1 que a capacidade máxima depende da área, poderão da mesma forma encontrar a capacidade máxima no Caso 2.

Os alunos deverão concluir uma capacidade máximo de 135 l, que é a mesma capacidade que encontraram no Caso 1. Sendo assim, esse é um importante momento para o professor questionar os alunos se independente do formato da seção, a capacidade será sempre o mesmo? Permita os alunos apresentarem suas opiniões, e então parta para o Caso 3.

O **Caso 3** possibilita que sejam retomados alguns conceitos de Geometria, Trigonometria, bem como, Funções.

Após entregar o problema aos alunos, o professor pode disponibilizar o '**Aplicativo 06 – caso 3 – primeiro momento'**. Para isso, o professor pode enviar o link 'https://ggbm.at/Xg6UwAjf' por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Professor, possibilite que os alunos pesquisem sobre conceitos da Geometria, caso não consigam resolver de imediato. Aos poucos faça mediações que os ajudem a romper algumas deficiências com a Matemática Básica, por exemplo. Ajude-os a expressar a área do trapézio em função de uma única variável.

Espera-se que novamente os alunos concluam uma função quadrática. E com essa função e o cálculo do volume, verifiquem que o formato da seção interfere na capacidade da calha, diferente do que podem ter concluído com o resultado dos casos anteriores.

O **Caso 4** difere dos demais, pois trata de uma semicircunferência de raio x, ou seja, não é necessário escolher o corte. O professor deve mediar de modo que os alunos se atentem que o comprimento da semicircunferência é a largura da calha exceto as dobras, ou seja, 60 cm. E com isso, a maior área é quando:

$$x = \frac{60}{\pi}$$

Os alunos provavelmente tentarão calcular a área do semicírculo. Talvez alguns alunos não lembrem de imediato a equação, sendo assim, o professor poderá auxiliá-los.

O último caso, **Caso 5,** explora tanto os conceitos de retângulo como o de círculo.

Após entregar o problema aos alunos, o professor pode disponibilizar o '**Aplicativo 06 – caso 5 – primeiro momento'**. Para isso, o professor pode enviar o link 'https://ggbm.at/YKscxk6E' por e-mail, ou salvar o aplicativo e compartilhar através de um pen drive.

Os alunos provavelmente buscarão relacionar a maior capacidade com a maior área, e utilizar tal área como uma função de uma única variável. Porém, eles podem ainda ter certas dificuldades. Sendo assim, o professor poderá auxiliá-los a verificar que a área está relacionada ao perímetro, afinal, o perímetro é fixo de valor 60 cm, e isso deve ser considerado nas variáveis.

Talvez seja conveniente o uso de uma calculadora. O professor pode permitir que o aluno use a própria calculadora do software GeoGebra, ou outra caso preferir.

Novamente os alunos deverão chegar a uma função quadrática. Então, caso o professor ainda não tenha explorado o conteúdo de Máximos e Mínimos usando derivada, é conveniente que o professor instigue os alunos a pensar sobre um caso em que a função não fosse quadrática, como seriam realizados os cálculos de otimização? Com isso, o professor deve desenvolver a teoria de Máximos e Mínimos e explorar outros problemas, e ainda, se possível retornar ao Problema da Calha usando agora diretamente o conteúdo de Cálculo.

Obs. 1: Após cada discussão o professor pode explorar o segundo momento de cada aplicativo, em anexo, para concluir a resolução do problema e intuitivamente formalizar o conteúdo. Ademais, durante a formalização é interessante que o professor varie ao menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

Obs. 2: Não indicamos que esse problema seja aplicado por completo ao Ensino Médio para introduzir o conteúdo de Máximos e Mínimos de Funções, pois nem todos os conteúdos de Geometria e Trigonometria podem ser de conhecimento dos alunos. Funções é um conteúdo do 1° ano do Ensino Médio, e alguns conteúdos necessários para resolução desse problema são dos anos subsequentes. Porém, caso seja de interesse do professor aplicar, sugerimos que utilize os casos em que os conteúdos necessários para resolução são de conhecimento dos alunos.

Bom trabalho!

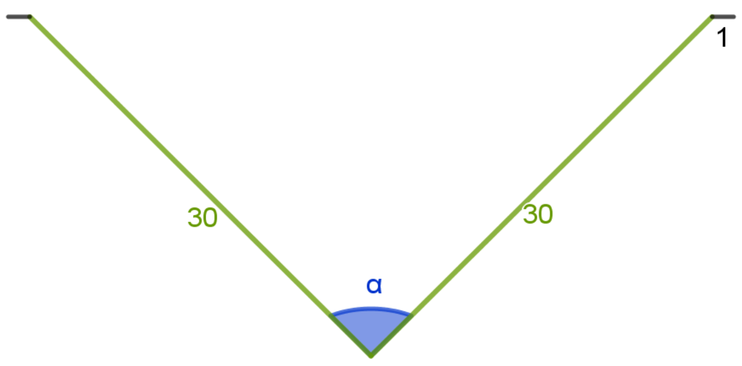
Apêndice 15 – Problema 6.2

Aluno(s):
Data:

Problema – Calha Seção triangular

Uma chapa galvanizada retangular, com 3 m de comprimento e 62 cm de largura, será dobrada em formato de seção triangular de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Deseja-se obter as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade. Assim como mostra a Figura 1, considere uma ‘dobra’ de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação.

Figura 1 – Planificação da calha seção triangular



Fonte: a autora

Fonte: adaptado de Menino e Onuchic (2017)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

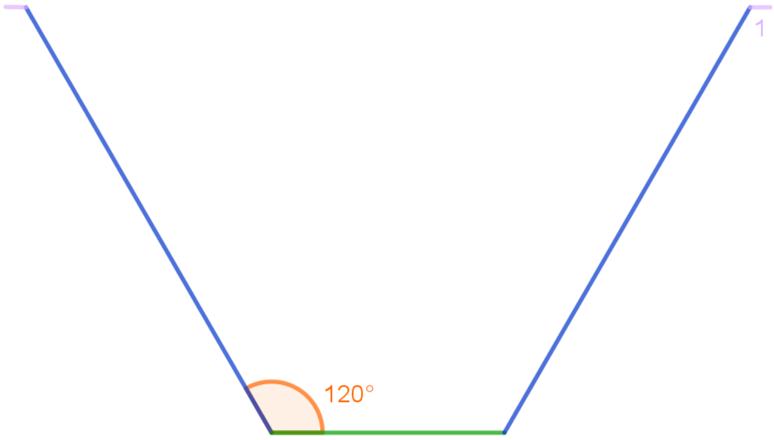
Apêndice 16 – Problema 6.3

Aluno(s):
Data:

Problema – Calha Seção trapezoidal

Uma chapa galvanizada retangular, com 3 m de comprimento e 62 cm de largura, será dobrada em formato de seção trapezoidal de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Deseja-se obter as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade. Assim como mostra a Figura 1, considere uma 'dobra' de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação, e um ângulo fixo de 120°.

Figura 1 – Planificação da calha seção trapezoidal



Fonte: a autora

Fonte: adaptado de Menino e Onuchic (2017)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

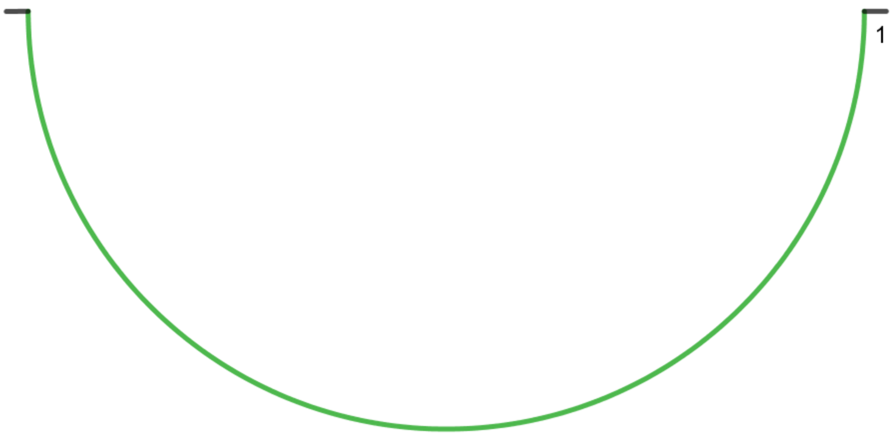
Apêndice 17 – Problema 6.4

Aluno(s):
Data:

Problema – Calha Seção semicircular

Uma chapa galvanizada retangular, com 3 m de comprimento e 62 cm de largura, será dobrada em formato de seção semicircular de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Deseja-se obter as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade. Assim como mostra a Figura 1, considere uma 'dobra' de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação.

Figura 1 – Planificação da calha seção semicircular



Fonte: a autora

Fonte: adaptado de Menino e Onuchic (2017)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

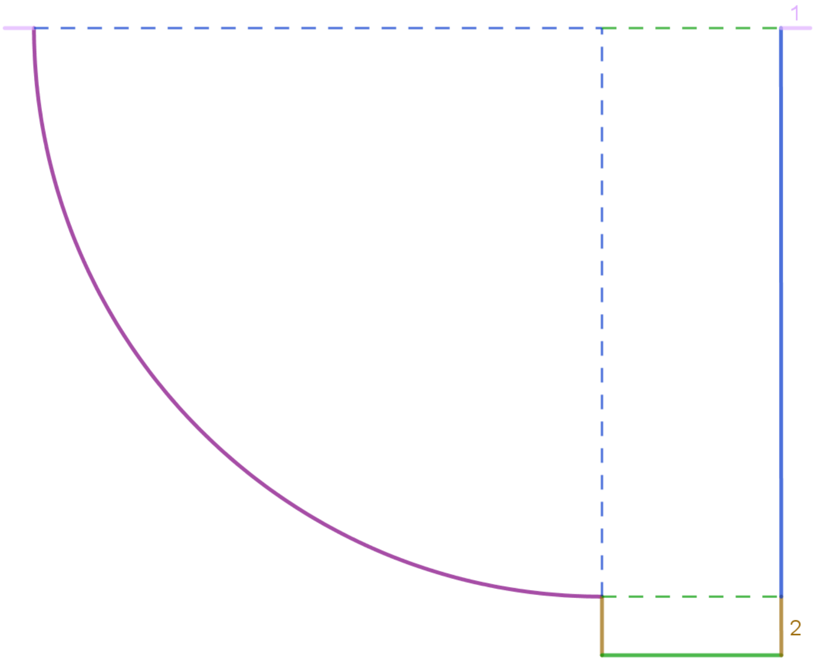
Apêndice 18 – Problema 6.5

Aluno(s):
Data:

Problema – Calha Seção retângulo-circular

Uma chapa galvanizada retangular, com 3 m de comprimento e 62 cm de largura, será dobrada em formato de seção retângulo-circular de modo a formar uma calha com 3 metros de comprimento. Deseja-se obter as medidas dessa seção que proporcionam a maior capacidade possível de água e o valor dessa capacidade. Assim como mostra a Figura 1, considere uma 'dobra' de 1cm de cada lado ao longo da calha, que será usada para fixação.

Figura 1 – Planificação da calha seção retângulo-circular



Fonte: a autora

Fonte: adaptado de Menino e Onuchic (2017)

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

Apêndice 19 – Problema 7

Aluno(s):
Data:

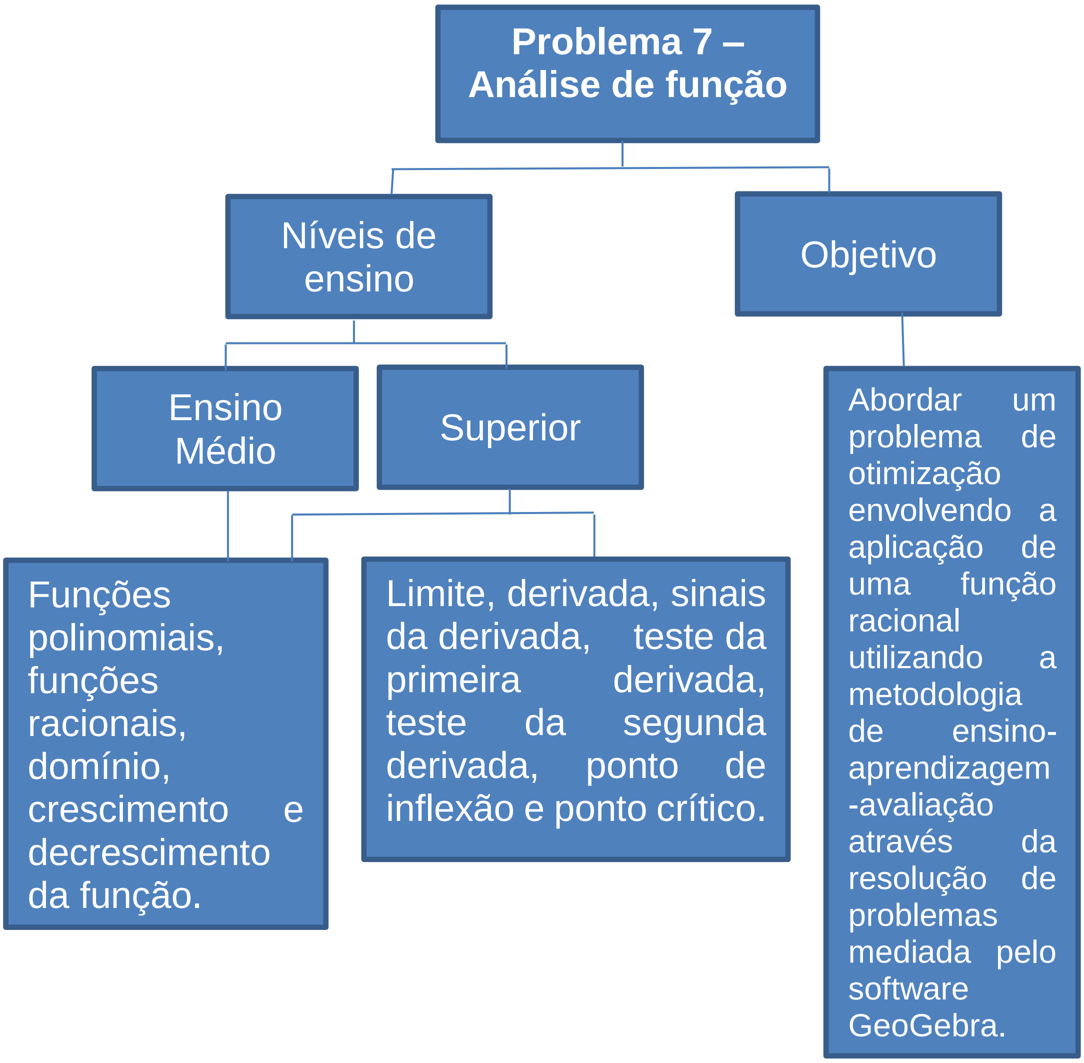
Problema – análise de função racional:

Dada a função contínua $f(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$, analise algebricamente essa função, encontre seu(s) valor(es) extremo(s) e apresente seu gráfico.

- Registre em uma folha todas as estratégias de resolução pensadas pelo grupo e entregue ao professor no final da atividade.

Apêndice 20 – Conversando com o professor

MATERIAL PARA O PROFESSOR



Professor, é interessante que o problema seja aplicado em um laboratório de informática que esteja disponível o software GeoGebra, ou então, tenha a possibilidade de usar tecnologias móveis (tablets ou smartphones), haja vista que o GeoGebra é compatível com tais tecnologias.

É conveniente que seja estipulado um tempo para a resolução do problema.

Seguindo a metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas (ALLEVATO; ONUCHIC, 2014), apresentada no capítulo Metodologia, assim que apresentar o problema aos alunos deve-se disponibilizar o **software GeoGebra**. Para isso, o professor pode utilizar tablets ou computadores. Nessa atividade não abordamos um aplicativo pronto para o aluno utilizar. Nesse problema o GeoGebra pode ser utilizado para o próprio aluno verificar hipóteses, realizar cálculos, evidenciar valores e confirmar sua resposta final.

Enquanto o professor observa e media, pode fazer as seguintes questões se achar conveniente:

- Qual o domínio da função?
- Quantos extremos a função apresenta? Que comportamento espera no gráfico dessa função?
- Represente o gráfico da função utilizando o GeoGebra e analise-o.
- Existe(m) ponto(s) em que a função não está definida?
- A função tem ponto(s) extremo(s)? Se sim, em qual ponto?

Obs.: Essas questões devem ser feitas à medida que o problema estiver sendo desenvolvido. O professor poderá perceber a necessidade de fazer outras questões, ou ainda, não ver necessidade em usá-las caso os grupos estejam tendo um bom desempenho.

Finalizadas as resoluções e discussões, o professor junto com a turma deve chegar a uma resposta correta explorando o software GeoGebra. Se preferir, paralelo a resolução do problema, pode formalizar o conteúdo de Máximos e Mínimos. Durante a formalização é interessante que o professor varie pelo menos entre a representação analítica e gráfica do conteúdo utilizando o GeoGebra.

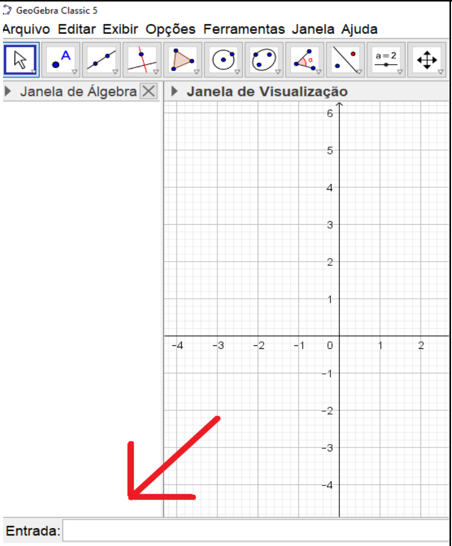
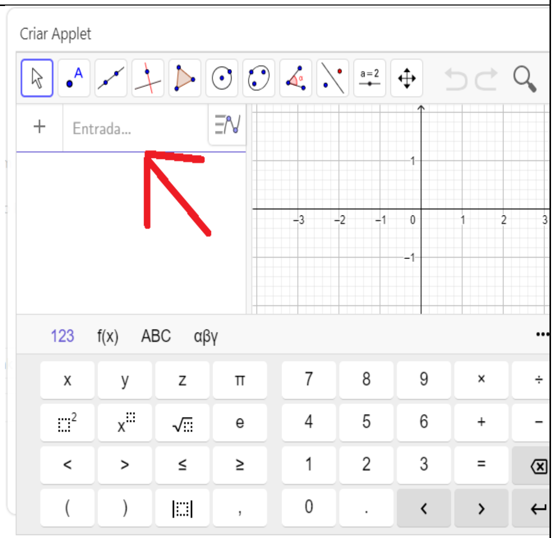
Por fim, professor, na proposição de novos problemas aos alunos, sugerimos que utilize alguns dos demais problemas apresentados nesse GeoGebra Book.

Bom trabalho!

Apêndice 21 – Manual Básico do Caderno Didático

Comandos básicos do GeoGebra necessários para utilizar o caderno didático dinamicamente

Primeiramente o usuário deve conhecer a **‘Caixa de Entrada’**. Essa caixa serve para inserir os comandos a serem executados no software. Pode aparecer de dois modos diferentes, dependendo da versão do aplicativo ou se está sendo utilizado online.

Caixa de Entrada na parte inferior da tela	Caixa de Entrada na lateral esquerda da tela
	

Fonte: a autora

Alguns comandos básicos de operação

Multiplicação: Para realizar uma **multiplicação** no software GeoGebra, usamos o símbolo *

Por exemplo:

O que queres fazer	Como executar no GeoGebra
$2 \cdot 5$	$2 * 5$
$3 \cdot (x + 1)$	$3 * (x + 1)$

Divisão: Para realizar uma **divisão** usamos o símbolo /

Por exemplo:

O que queres fazer	Como executar no GeoGebra
$\frac{1}{2}$	$1/2$
$\frac{3}{2} \cdot x$	$(3/2) * x$

Potência: Para realizar a **potenciação** de um número deve utilizar o símbolo ^

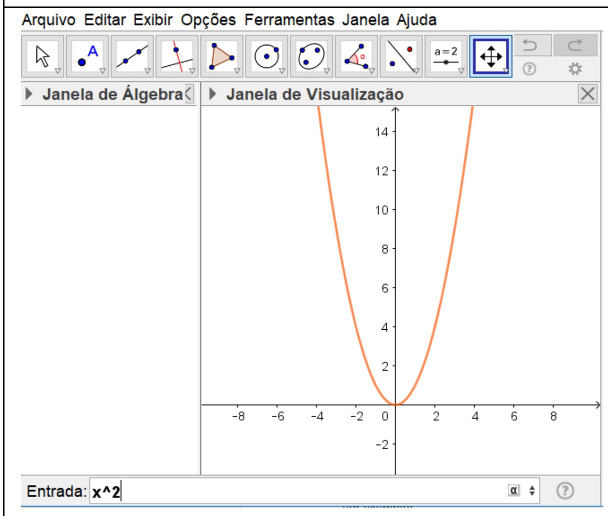
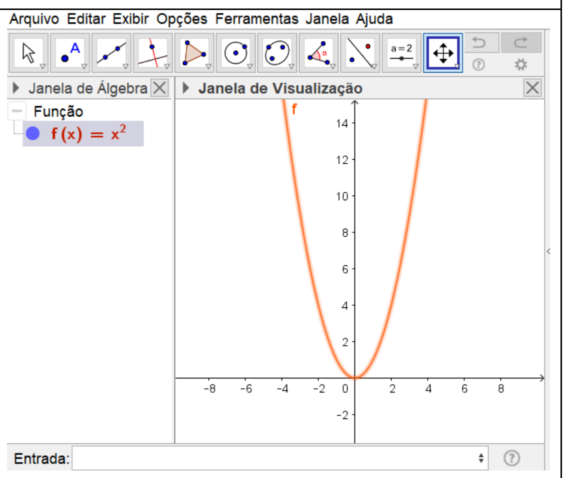
Por exemplo:

O que queres fazer	Como executar no GeoGebra
2^3	$2\text{^}3$
$x^2 - 1$	$x\text{^}2 - 1$
3^{x+5}	$3\text{^}(x + 5)$

Comandos básicos para representação de funções

Para representar uma **função** no GeoGebra deve-se apenas escrever a lei da função no campo de entrada e clicar ‘Enter’.

Por exemplo:

<table>
<tr><td>Representar a função x²</td><td>Resultado</td></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

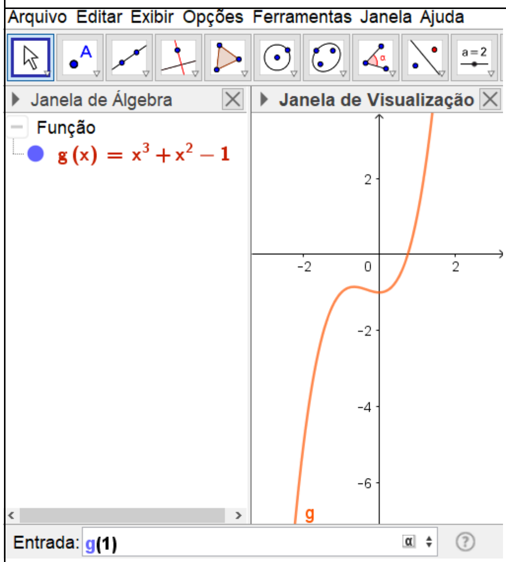
Fonte: a autora

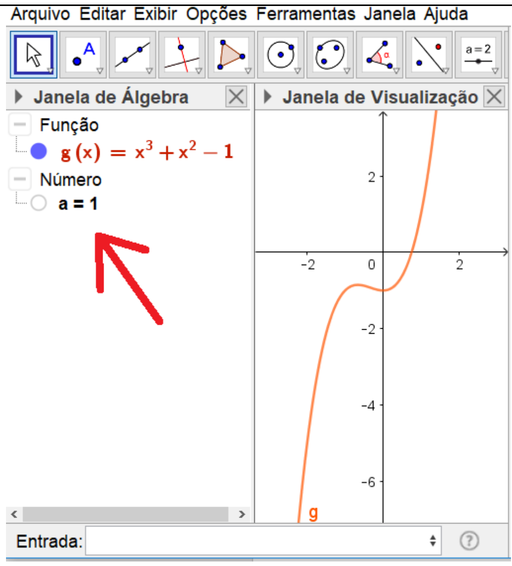
Obs.: Perceba que não se escreve o nome da função no campo de entrada para defini-la. O GeoGebra nomeia a função automaticamente. Caso queira mudar o nome da função, clique com o botão direito do mouse sobre a lei da função e vá em ‘Renomear’.

Calcular o valor de uma função $f(x)$ em x_0

Dada uma função f, para calcular **o valor** dessa **função** em x_0 basta escrever no campo de entrada: $f(x_0)$

Por exemplo:

<table>
<tr><td>Dada a função $g(x)$, queremos calcular $g(1)$</td><td>Resultado</td></tr>
<tr><td>


</td><td>


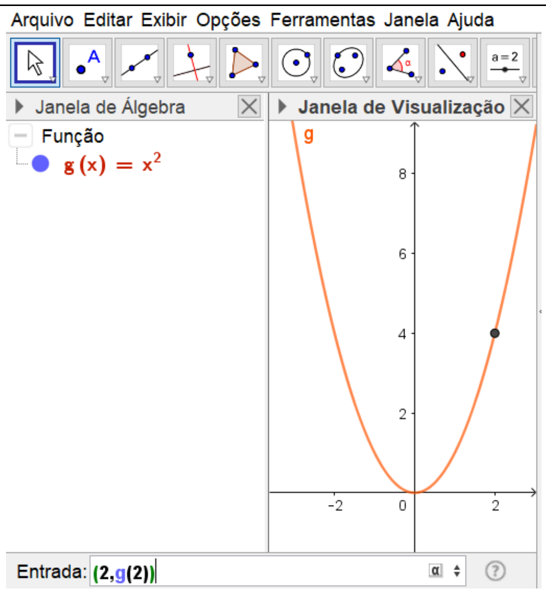
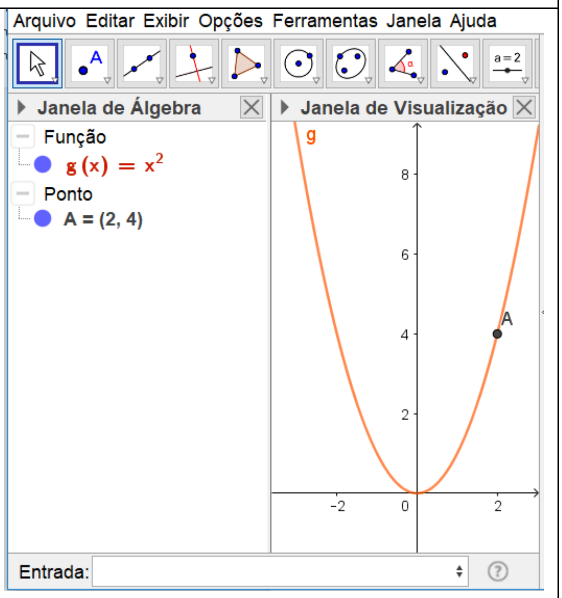
</td></tr>
</table>

Fonte: a autora

Representar o ponto $(x_0, f(x_0))$

Dada uma **função** $f(x)$ para representar um **ponto** com abscissa x_0, basta escrever no campo de entrada: $(x_0, f(x_0))$.

Por exemplo:

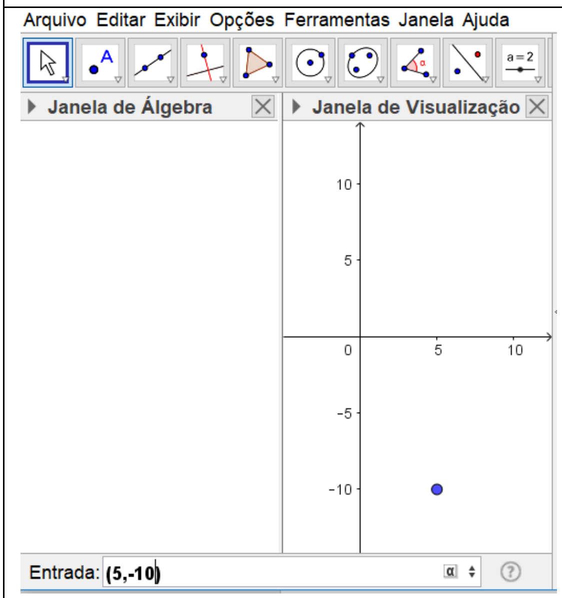
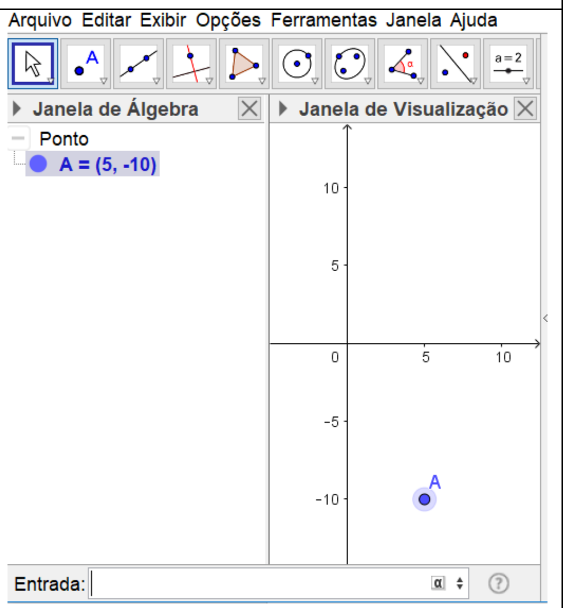
Dada a função $g(x)$, queremos representar o ponto com abscissa $x = 2$	Resultado
	

Fonte: a autora

Representar um ponto $(\boldsymbol{x_0}, \boldsymbol{y_0})$

Para representar um **ponto qualquer** no plano cartesiano, basta escrever no campo de entrada: (x_0, y_0)

Por exemplo:

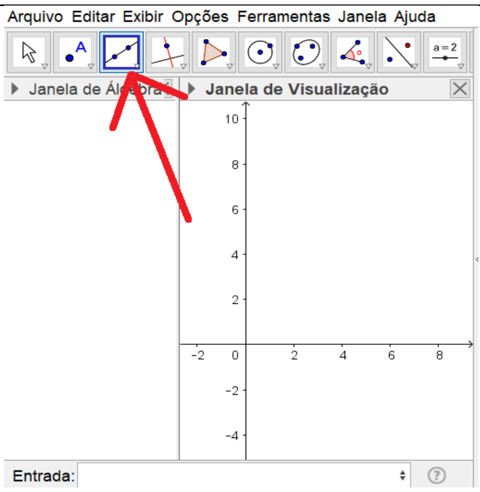
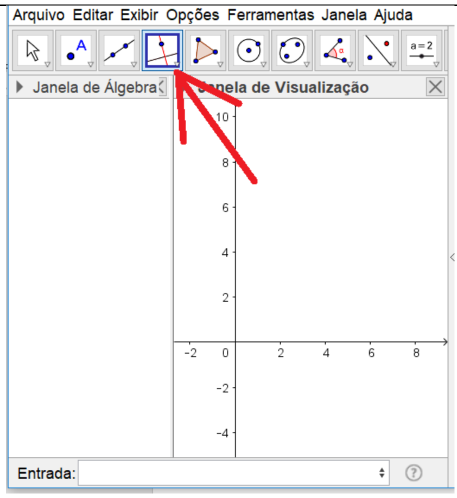
Representar o ponto (5, -10)	Resultado
	

Fonte: a autora

Ferramentas do GeoGebra

Para traçar **retas, semirretas ou segmento de reta com comprimento fixo** vá no terceiro ícone no menu superior e selecione a opção desejada.

Caso queira traçar **retas paralelas, perpendiculares ou tangente**, vá no quarto ícone do menu superior e selecione a opção desejada.

Construção de retas, semirretas ou segmento de reta com comprimento fixo	Construção de retas paralelas, perpendiculares ou tangentes
	

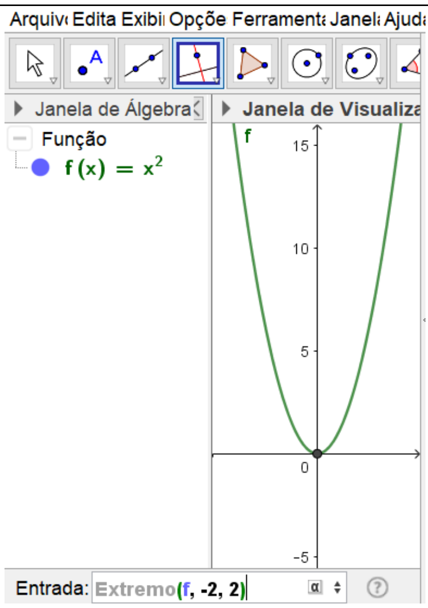
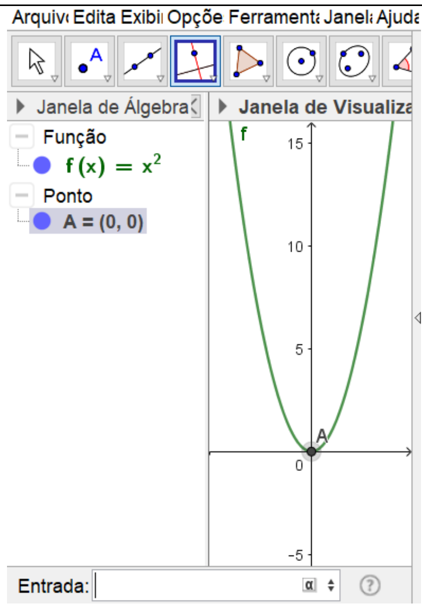
Fonte: a autora

Verificar ponto extremo da função em um intervalo

Dada uma **função**, para verificar o **ponto extremo,** caso exista, da função em um intervalo, use o comando: Extremo(<Função>, <Valor de x Inicial>, <Valor de x Final>)

No lugar de <Função> deve ser escrito o nome da função a ser analisada. Em <Valor de x Inicial> e <Valor de x Final> deve ser escrito o intervalo desejado.

Por exemplo:

<table>
<tr><th>Extremo da função f no intervalo (-2,2)</th><th>Resultado</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

Fonte: a autora

Esses são os comandos básicos que são úteis para realizar alguns procedimentos de resolução no Caderno Didático.