



xx.yy.2015



Mathematische Prozesse mit Matrizen beschreiben

Zyklische Matrizen¹

Während sich bei stochastischen Matrizen der stationäre Zustand eines Systems erst als Grenzprozess einstellt, tritt ein stationärer Zustand bei zyklischen Matrizen periodisch auf. Deshalb sind zyklische Matrizen gut geeignet, periodisch verlaufende Populationsentwicklungen wie zum Beispiel bei Maikäfern oder Schmetterlingen zu beschreiben. Unter bestimmten Voraussetzungen wiederholt sich die Populationsentwicklung zyklisch wachsend oder fallend.

Eine Matrix A heißt zyklisch, wenn es eine natürliche Zahl k gibt mit $A^k = E$. Genau dann gilt $A^k \vec{x}_0 = \vec{x}_0$, \vec{x}_0 beschreibt hierbei die Anfangsverteilung einer Population. Ein zyklisches Wachstum bzw. eine zyklische Abnahme einer Population ist gegeben, wenn $A^k = \lambda E$ mit $\lambda > 0$ bzw. $\lambda < 0$.

Arbeitsauftrag

Bearbeiten Sie die Planarbeit „Zyklische Matrizen“ in der Schülerrolle. Bearbeiten Sie die eine oder andere Kontrollaufgabe.

- Wie viel Zeit würden Sie für die Bearbeitung der Planarbeit veranschlagen?

Beachten Sie, dass die Matrizenmultiplikation mit dem in der Abiturprüfung erlaubten wissenschaftlichen Taschenrechner nicht ausgeführt werden kann.

Bereiten Sie eine Präsentation vor, in der Sie die wesentlichen Begriffe zu zyklischen Matrizen vorstellen. Vorlagen (Folien) hierzu liegen bereit, ergänzen Sie diese nach Bedarf.

Stellen Sie typische Aufgabenstellungen vor.

Zeit für die Gruppenarbeit: 90 Minuten

Zeit für die Präsentation: 7-10 Minuten

¹ In der mathematischen Fachliteratur findet man unter dem Begriff „Zyklische Matrix“ auch eine andere Klasse von Matrizen. Eine quadratische Matrix heißt auch dann zyklisch (oder zirkulant), wenn die Spalten durch zyklische Verschiebungen der ersten Spalte gebildet sind.

$$A := \begin{pmatrix} a_0 & a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_{n-1} & \dots & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & \dots & a_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \end{pmatrix}$$

Summe und Produkt solcher zirkulanten (zyklischen) Matrizen sind auch zirkulant (zyklisch). **Diese Matrizen sind ausdrücklich nicht Gegenstand des Unterrichts.**