Perlenkette mit n Perlen und k Farben

Man hat k Farben und eine Kette mit n Perlen.
Wie viele verschiedene Ketten gibt es, wenn man von Rotationen und Spiegelungen absieht?

Lösung:

In einem regulären n-Eck wird die Gruppe G der Drehungen und Spiegelungen untersucht.

Fall 1: n sei ungerade:

$G = \{D_0, D_1, D_2, .., D_{n-1}, S_1, S_2, .., S_n\}$, S_i … Spiegelachse durch Eckpunkt

Fall 2: n sei gerade:

$G = \{D_0, D_1, D_2, .., D_{n-1}, S_1, S_2, .., S_{n/2}, M_1, M_2, .., M_{n/2}\}$ Achse durch Ecke bzw. Achse durch Seitenmitte

In jedem Fall ist $|G| = 2n$.

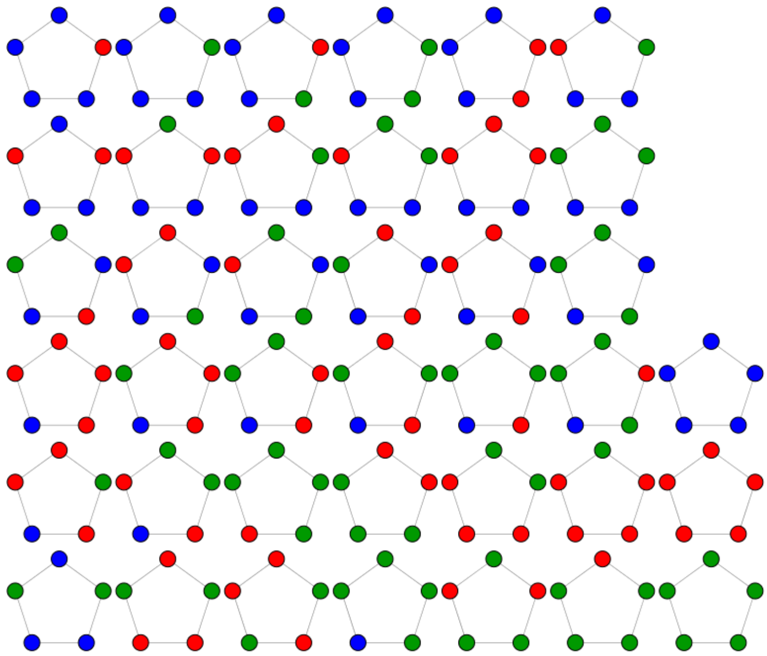
Drehungen und Spiegelungen setzen sich aus Zyklen zusammen, wobei jeder Zyklus ein Farbbild der Kette fix lässt. Für jede Bewegung (Drehung /Spiegelung) wird die Zahl der Fixbilder bestimmt. Wenn man alle Anzahlen der Fixbilder addiert und durch die Gruppenmächtigkeit dividiert, erhält man die Zahl der verschiedenen Perlenketten.
Zyklen bei n Perlen hängen von der Teilbarkeit ab. Deshalb spielt n= prim eine Sonderrolle, weil es dann hinsichtlich Drehungen (n-1) Einfach-Zyklen mit k Fixierungen und hinsichtlich Spiegelungen genau n mal (n+1)/2-Zyklen mit je $k^{(n+1)/2}$ Fixierungen gibt.
Allgemein: $\boldsymbol{P(n,k) = \frac{1}{2n}\left(k^n + n \cdot k^{\frac{n+1}{2}} + (n-1) \cdot k\right)}$**, n prim**

Beispiele:

(1) n = 5, k = 3: Die Perlenkette hat 5 Perlen und man hat 3 verschiedene Farben.
$G = \{ D_0, D_{72}, D_{144}, D_{216}, D_{288}, S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\} \Rightarrow |G| = 10$
Die Ecken des 5-Ecks seien nummeriert:
D_0: (1)(2)(3)(4)(5) sind 5 Zyklen => k^5 Fixierungen
D_{72}: (12345) ist ein Zyklus => k Fixierungen
D_{144}: (13524) ist ein Zyklus => k Fixierungen
D_{216}: (14253) ist ein Zyklus => k Fixierungen
D_{288}: (15432) ist ein Zyklus => k Fixierungen
S_1: (1)(25)(34) sind drei Zyklen => k^3 Fixierungen
S_2: (13)(2)(45) sind drei Zyklen => k^3 Fixierungen
S_3: (15)(24)(3) sind drei Zyklen => k^3 Fixierungen
S_4: (12)(35)(4) sind drei Zyklen => k^3 Fixierungen
S_5: (14)(23)(5) sind drei Zyklen => k^3 Fixierungen

=> $\boldsymbol{P(5,k) = \frac{1}{10}\left(k^5 + 5k^3 + 4k\right)}$

k = 3 => P(5,3) = 39



(2) Ist n ungerade und keine Primzahl:
* die teilerfremden Zahlen je k Fixierungen d.h. $\varphi(n)$ mal k .
* bei den anderen Zahlen spielt der d= ggT(n,t) eine Rolle, d.h. k^d Fixierungen.

z.B. n = 9. $\varphi(9)$ = 6, gemeinsame Teiler T(9) = {3,6} mit d = 3 => 2 mal k^3
=> $\boldsymbol{P(9,k) = \frac{1}{18}(k^9 + 9k^5 + 2k^3 + 6k)}$

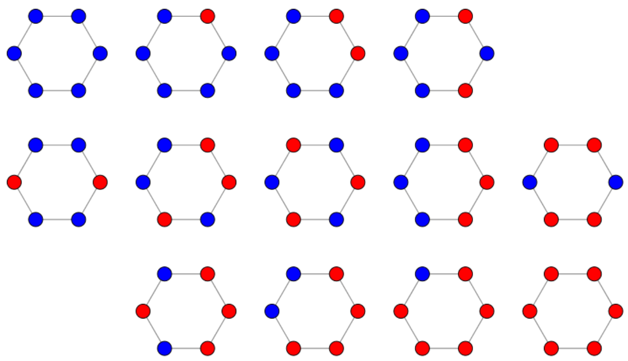
z.B. n = 15. $\varphi(15)$ = 8, gemeinsame T(15) = {3,5,6,9,10,12} mit d = 3 und d = 5
=> 4 mal k^3 und 2 mal k^5.
=> $\boldsymbol{P(15,k) = \frac{1}{30}(k^{15} + 15k^8 + 2k^5 + 4k^3 + 8k)}$

(3) n = 6, k = 2: Die Perlenkette hat 6 Perlen und man hat 2 verschiedene Farben.

$G = \{D_0, D_{60}, D_{120}, D_{180}, D_{240}, D_{300}, S_1, S_2, S_3, M_1, M_2, M_3\} = |G| = 12$
Die Ecken des 6-Ecks seinen nummeriert:
D_0: (1)(2)(3)(4)(5)(6) sind 6 Zyklen => k^6 Fixierungen
D_{60}: (123456) ist 1 Zyklus => k Fixierungen
D_{120}: (135)(246) sind 2 Zyklen => k^2 Fixierungen
D_{180}: (14)(25)(36) sind 3 Zyklen => k^3 Fixierungen
D_{240}: (153)(264) sind 2 Zyklen => k^2 Fixierungen
D_{300}: (165432) ist 1 Zyklus => k Fixierungen
S_1: (1)(26)(35)(4) sind 4 Zyklen => k^4 Fixierungen
S_2: (13)(2)(46)(5) sind 4 Zyklen => k^4 Fixierungen
S_3: (15)(24)(3)(6) sind 4 Zyklen => k^4 Fixierungen
M_1: (12)(36)(45) sind 3 Zyklen => k^3 Fixierungen
M_2: (14)(23)(56) sind 3 Zyklen => k^3 Fixierungen
M_3: (16)(25)(34) sind 3 Zyklen => k^3 Fixierungen

=> $\boldsymbol{P(6,k) = \frac{1}{10}(k^6 + 3k^4 + 4k^3 + 2k^2 + 2k)}$

k = 2 => P(6,2) = 13



z.B. n = 8: Drehungen D_0 bisD_7: $\varphi(8) = 4$ => 4 k Fixierungen.
gemeinsame Teiler T(8) = {2, 4, 6} mit d = 2 und d = 4 => $2k^2$ und $1k^4$
Spiegelungen S_1 bis S_4: 4 k^5 und M_1 bis M_4: 4 k^4.

=> $\boldsymbol{P(8,k) = \frac{1}{16}(k^8 + 4k^5 + 5k^4 + 2k^2 + 4k)}$

Analog: n = 10, 12, 14, … $\boldsymbol{P(n,k) = \frac{1}{2n}(k^n + nk^{\frac{n+1}{2}} + (\frac{n}{2}+1)k^{\frac{n}{2}} + Rest)}$
wobei der Rest von den Drehungen und damit von der Teilbarkeit von n abhängt.

z.B. n = 12: Drehungen D_0 bisD_{11}: $\varphi(12) = 4$ => 4 k Fixierungen.
gemeinsame Teiler T(12) = {2, 3, 4, 6, 8, 9, 10} d.h.
mit d = 2 (2 und 10) => $2k^2$, d = 3 (3 und 9) => $2k^3$ und d = 4 (4 und 8) => $2k^4$ sowie d = 6 => k^6
Spiegelungen S_1 bis S_6: 6 k^7 und M_1 bis M_6: 6 k^6 => $7k^6$ (wegen d=6).

=> $\boldsymbol{P(12,k) = \frac{1}{24}(k^{12} + 6k^7 + 7k^6 + 2k^4 + 2k^3 + 2k^2 + 4k)}$

P(12,2) = 224.

Sonderfall:

Wenn man nur Rotationen berücksichtigt, weil man die Kette (hinter einer Glasvitrine) zwar drehen aber nicht wenden (spiegeln) kann, dann reduziert sich die Formel um die Spiegelungsmöglichkeiten:

n ist prim: $\boldsymbol{P(n,k) = \frac{1}{n}(k^n + (n-1)\cdot k)}$, z.B. P(5,4) = 208.

n ist ungerade (nicht prim): $\boldsymbol{P(n,k) = \frac{1}{n}(k^n + Rest)}$**,** Rest richtet sich nach Teilbarkeit von n bezüglich Drehungen.

n ist gerade: $\boldsymbol{P(n,k) = \frac{1}{n}(k^n + Rest)}$**,** Rest richtet sich nach Teilbarkeit von n bezüglich Drehungen.

<u>Aufgabe</u>: Man hat eine Perlenkette mit 6 roten und 6 blauen Perlen. Wie viele Möglichkeiten verschiedener Ketten gibt es, wenn man …
a) … (nur) von Drehungen
b) … von Drehungen und Spiegelungen absieht?

ad a) Ordnung der Drehgruppe ist 12. Für Deckdrehungen kommen die gemeinsamen Teiler von 12 und 6 in Frage. {1,2,3,6} mit $\varphi(1) = 1, \varphi(2) = 1, \varphi(3) = 2, \varphi(6) = 2.$

$$\Rightarrow \frac{1}{12}\left(1 \cdot \binom{\frac{12}{1}}{\frac{6}{1}} + 1 \cdot \binom{\frac{12}{2}}{\frac{6}{2}} + 2 \cdot \binom{\frac{12}{3}}{\frac{6}{3}} + 2 \cdot \binom{\frac{12}{6}}{\frac{6}{6}}\right) = \frac{960}{12} = 80.$$

ad b) Ordnung der Diedergruppe aus Drehungen Spiegelungen ist 24.
Bei den Spiegelungen gibt es zwei Typen zu berücksichtigen:

Typ 1: Spiegelachse geht durch zwei (gegenüberliegende) Perlen gleicher Farbe. (2 Möglichkeiten)
Aus Symmetriegründen sind 10/2 = 5 Perlen im Farbverhältnis 3:2 zu berücksichtigen. Das sind mit 6 möglichen Achsen insgesamt $2 \cdot \binom{5}{2} \cdot 6 = 120$ Möglichkeiten.
Typ 2: Spiegelachse geht durch die Mitte zweier (benachbarter) Perlen. Wegen der Symmetrie bleiben 6 Perlen im Farbverhältnis 1:1. Das sind mit 6 möglichen Achsen insgesamt $6 \cdot \binom{6}{3} =$ 120 Möglichkeiten.

In Summe erhält man 960 (Drehungen) + 240 (Spieglungen) = 1200 $\Rightarrow \frac{1200}{24} = 50.$

Allgmein:

Kette mit m roten und m blauen Perlen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten, wenn man von Drehungen und Spiegelungen absieht?

Nur Drehungen berücksichtigen: $\boldsymbol{P(n) = \frac{1}{n} \cdot \left(\sum_{d|(n,m)} \varphi(d) \cdot \binom{\frac{n}{d}}{\frac{m}{d}}\right)}$

Fall: m gerade => m = 2k => n = 4k
Spiegelungen mit Typ 1 und Typ 2

$$\boldsymbol{\Rightarrow P(n) = \frac{1}{2n} \cdot \left(\sum_{d|(n,m)} \varphi(d) \cdot \binom{\frac{n}{d}}{\frac{m}{d}} + 2m \cdot \binom{m-1}{k} + m \cdot \binom{m}{k}\right)}$$

Fall: m ungerade => m = 2k+1 => n = 4k+2
Spiegelungen nur mit Typ 1, weil Typ 2 für m ungerade nicht möglich.

$$\boldsymbol{\Rightarrow P(n) = \frac{1}{2n} \cdot \left(\sum_{d|(n,m)} \varphi(d) \cdot \binom{\frac{n}{d}}{\frac{m}{d}} + 2m \cdot \binom{2k}{k}\right)}$$