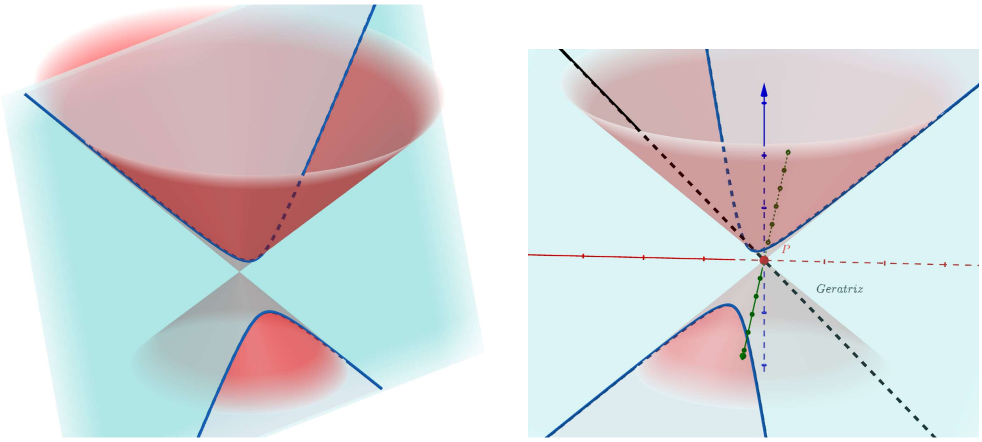
APÊNDICE D – EMBASAMENTO TEÓRICO: HIPÉRBOLE

Conforme visto anteriormente, a elipse pode ser visualizada como resultado da interseção de um cone duplo com um plano (Figura D.1).

Figura D.1 – Hipérbole gerada por uma interseção.



(a) (b)

Fonte: Próprio autor.

Todavia, para estudar as propriedades desta curva é mais conveniente explorá-la partindo da sua descrição geométrica. Por isto consideraremos aqui a definição da hipérbole via Lugar Geométrico. Para tal usaremos o conceito de distância entre pontos. Isto é, dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do plano, consideraremos a distância entre P_1 e P_2, denotada por $d(P_1, P_2)$ por

$$d(P_1, P_2) = ||\overline{P_1P_2}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

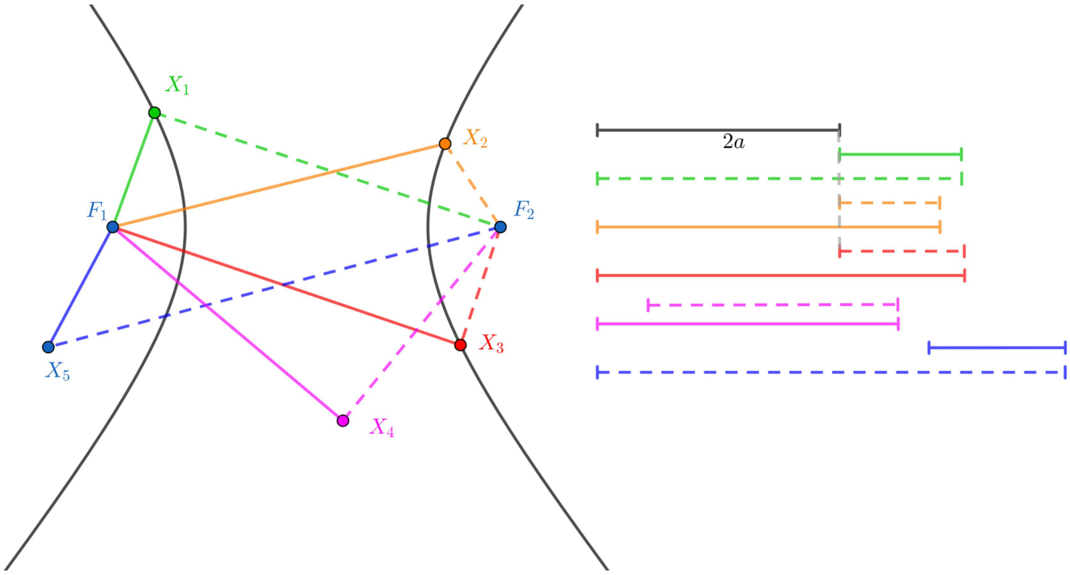
Definição D.1. *Chama-se* ***hipérbole*** *o lugar geométrico E dos pontos X de um plano tais que o módulo diferença das distâncias de X a dois pontos fixos distintos F_1 e F_2 deste plano é constante. Ou seja*

$$|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a,$$

onde a é um número real tal que $2a < d(F_1, F_2)$.

A Figura D.2 ilustra a definição da hipérbole.

Figura D.2 – Hipérbole: ilustração da definição



Fonte: Próprio autor.

Note que o ponto X_1 (cor verde) satisfaz a condição de que $|d(X_1, F_1) - d(X_1, F_2)| = 2a$. Para visualizar este fato, o lado direito da figura apresenta um segmento horizontal de tamanho $2a$ (em preto) e apresenta logo abaixo outro segmento horizontal (cor verde) formado por uma parte de tamanho correspondente ao segmento $\overline{X_1F_1}$ (linha contínua) seguido por outra parte com tamanho igual ao do segmento $\overline{X_1F_2}$ (linha tracejada). Logo é possível visualizar que ambos medem $2a$. O mesmo ocorre para os pontos X_2 (cor alaranjada) e X_3 (cor vermelha). Portanto, os X_1, X_2 e X_3 são pontos desta hipérbole. Todavia, no caso do ponto X_4 (cor lilás) teremos que $|d(X_4, F_1) - d(X_4, F_2)| < 2a$, enquanto para X_5 (cor azul) teremos $|d(X_5, F_1) - d(X_5, F_2)| > 2a$. Ou seja, X_4 e X_5 não pertencem a esta hipérbole.

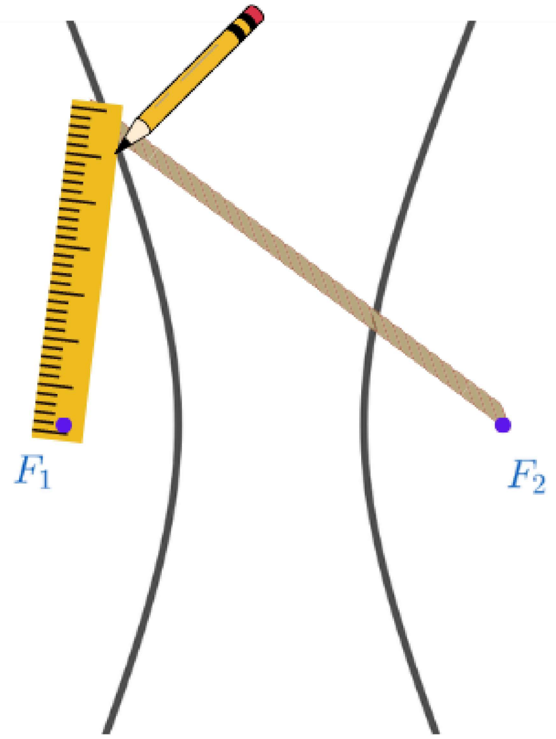
Na Definição D.1 aparece a condição $d(F_1, F_2) < 2a$. Para entender o motivo desta exigência, observe que a desigualdade triangular nos fornece que

$$d(F_1, F_2) = ||\overline{F_1, F_2}|| = ||\overline{F_1, X} + \overline{X, F_2}|| \leq ||\overline{F_1, X}|| + ||\overline{X, F_2}|| = d(X, F_2) + d(X, F_2).$$

Logo, se $d(F_1, F_2) > 2a$, nenhum ponto X terá como satisfazer a condição $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$ (em outras palavras, o resultado do lugar geométrico seria o conjunto vazio). No caso de $d(F_1, F_2) = 2a$, então apenas um único ponto X irá satisfazer a condição $|d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a$, e este ponto será o ponto médio entre F_1 e F_2. Alguma referências classificam estes casos como “hipérboles degeneradas”.

Uma maneira de construir um esboço de uma hipérbole é usando um barbante e uma régua. Para tal deve-se fixar a extremidade da régua no ponto F_1 e o barbante em F_2, o comprimento do barbante deve ser maior que a diferença da ponta solta da régua, em seguida amarre a ponta solta do barbante na ponta solta da régua. Use um lápis para tracejar um ramo da hipérbole a margem da régua mantendo sempre o barbante esticado, para construir o outro ramo basta repetir o processo.

Figura D.3 – Esboço da hipérbole utilizando lápis e barbante

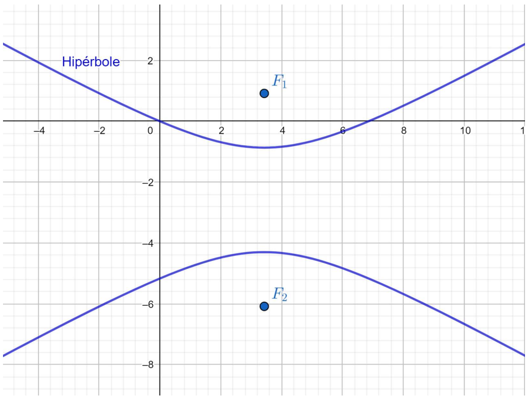


Fonte: Próprio autor.

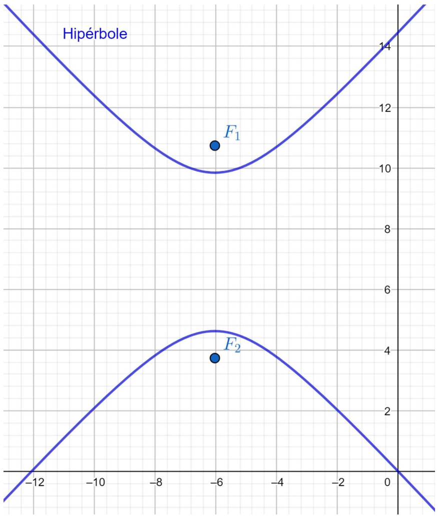
Note que, caso o barbante seja menor ou igual que a distância entre os pontos F_1 e F_2, não teremos a "sobra" do barbante para então obter os pontos desejados. É por isso que a Definição D.1 exige que $d(F_1, F_2) < 2a$.

Na Figura D.4 podem ser vistos mais alguns exemplos de hipérboles. Note que a hipérbole não precisa ter uma posição específica em relação ao sistema de coordenadas. Isto é, pode estar "deitada" em relação ao Eixo x (Figura D.4(a)), ou então "em pé" em relação ao Eixo x (Figura D.4(c)). O centro da hipérbole (ponto médio entre os pontos F_1 e F_2) também não precisa ter nenhum posicionamento específico em relação ao sistema de coordenadas.

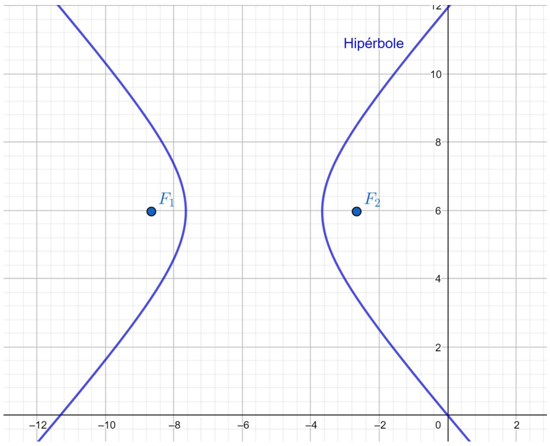
Figura D.4 – Exemplos de hipérboles transladadas



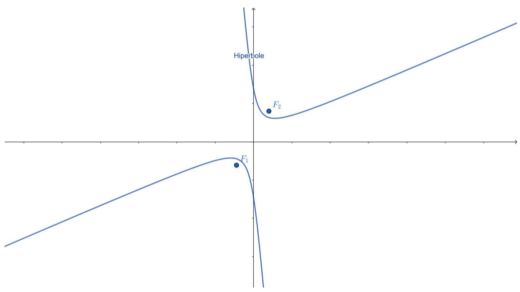
(a)



(b)



(c)



(d)

Fonte: Próprio autor.

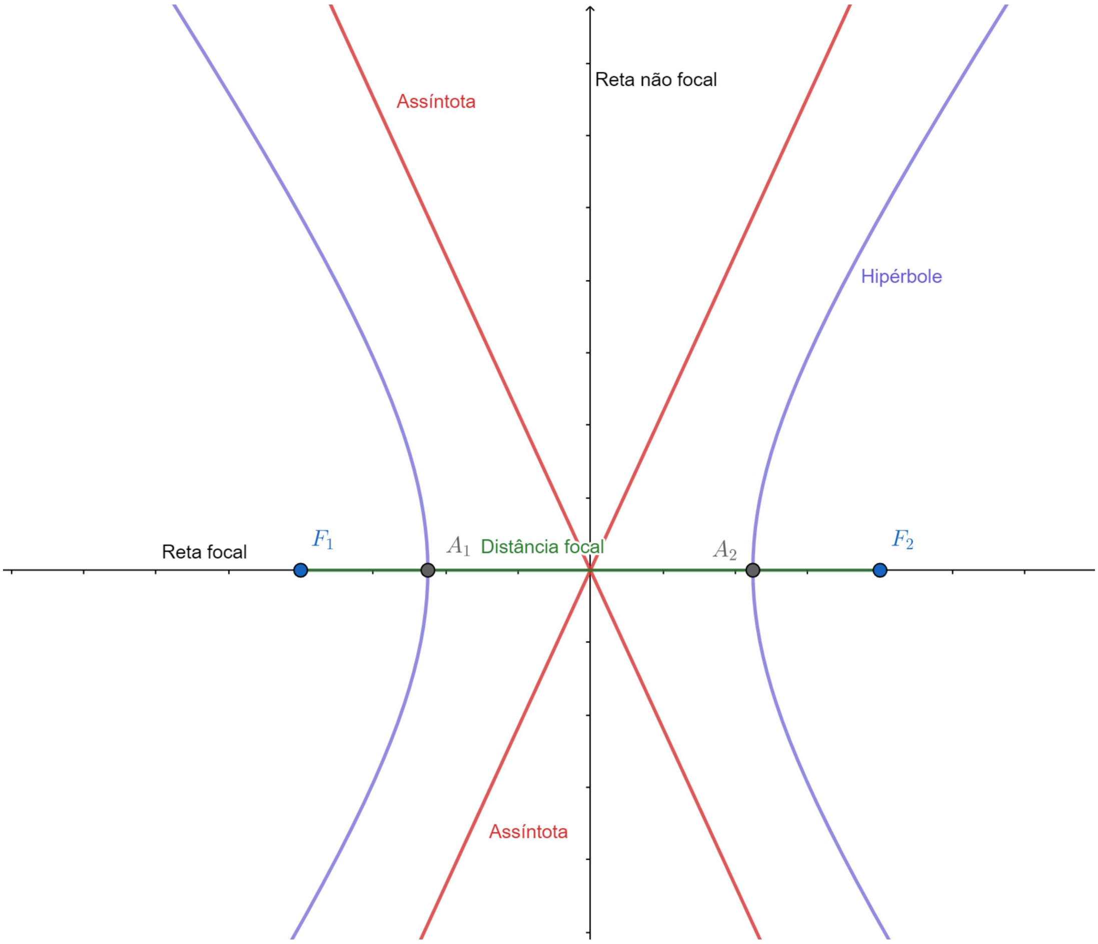
D.1 ELEMENTOS DA HIPÉRBOLE

Para compreendermos melhor esta curva, é importante obter uma forma de caracterizá-la através de uma equação. Todavia, para tal será importante estabelecer previamente os elementos e as nomenclaturas desta seção cônica. Os principais elementos da hipérbole estão listados abaixo e podem ser visualizados na Figura D.5.

- Focos: pontos fixos F_1 e F_2;
- Centro: ponto médio de F_1 e F_2 (denotado por C);
- Reta Focal: reta que contém os focos (denotada por r_1);
- Reta Não Focal: reta perpendicular à reta focal e que passa pelo centro (denotada por r_2);
- Vértices: pontos da hipérbole que interceptam a reta focal (denotados por A_1 e A_2);

- Vértices imaginários: Pontos não pertencente a hipérbole localizado na reta não focal (denotados por B_1 e B_2);
- Assíntota: são as retas que passam pelo centro da hipérbole e têm inclinação $\pm\frac{b}{a}$ em relação a reta focal.

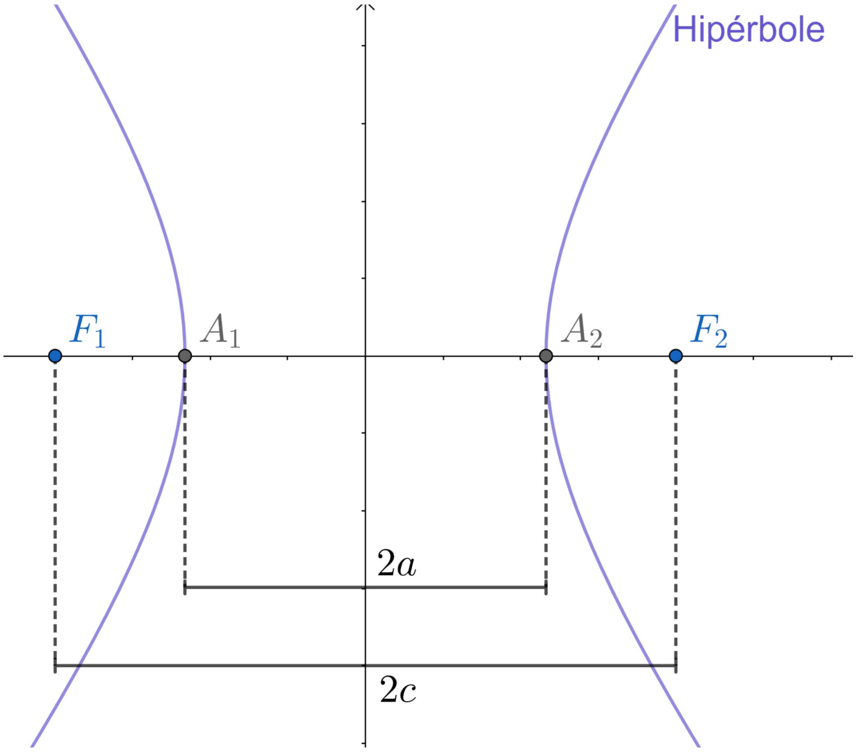
Figura D.5 – Elementos da hipérbole.



Fonte: Próprio autor.

A distância entre os focos ($d(F_1, F_2)$) é chamada de **distância focal** e é denotada por $2c$. Vale notar que, da definição da hipérbole, temos que $d(F_1, F_2) < 2a$. Ou seja, $c < a$. Observe ainda que $2a$ corresponde a distância entre os vértices, isto é, $2a = d(A_1, A_2)$. Logo, $c > a$ está garantindo que os os vértice A_1 e A_2 fiquem entre focos F_1 e F_2, como ilustra a Figura D.6. Uma vez que $2a$ equivale a distância entre os vértices A_1 e A_2, e $2c$ a distância entre os focos.

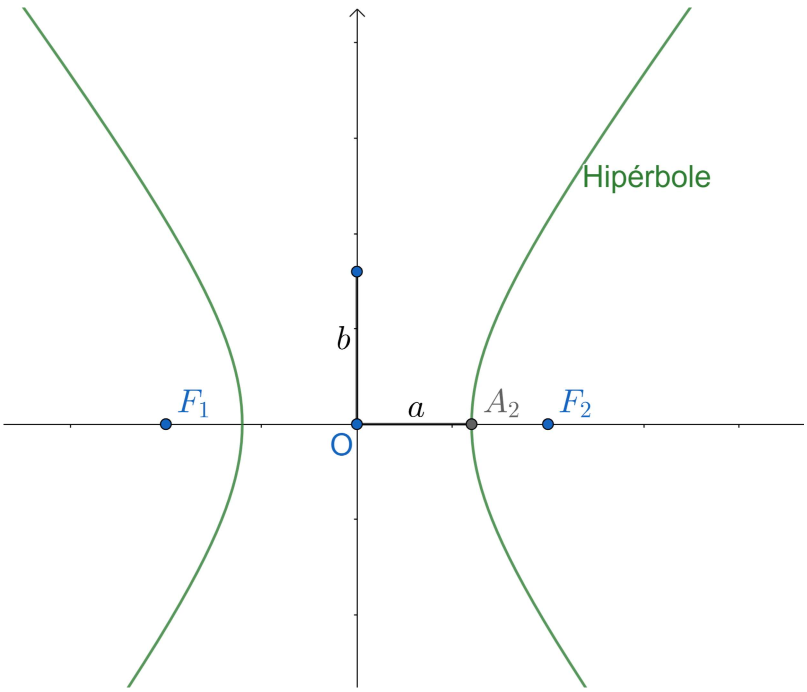
Figura D.6 – Distância focal e entre os vértices.



Fonte: Próprio autor.

Para construir as assíntotas utilizaremos alguns elementos da hipérbole que definimos anteriormente. Seja H uma hipérbole, a a distância do centro até o vértice e b a distância do centro ao vértice imaginário na reta não focal, como mostra a Figura D.7.

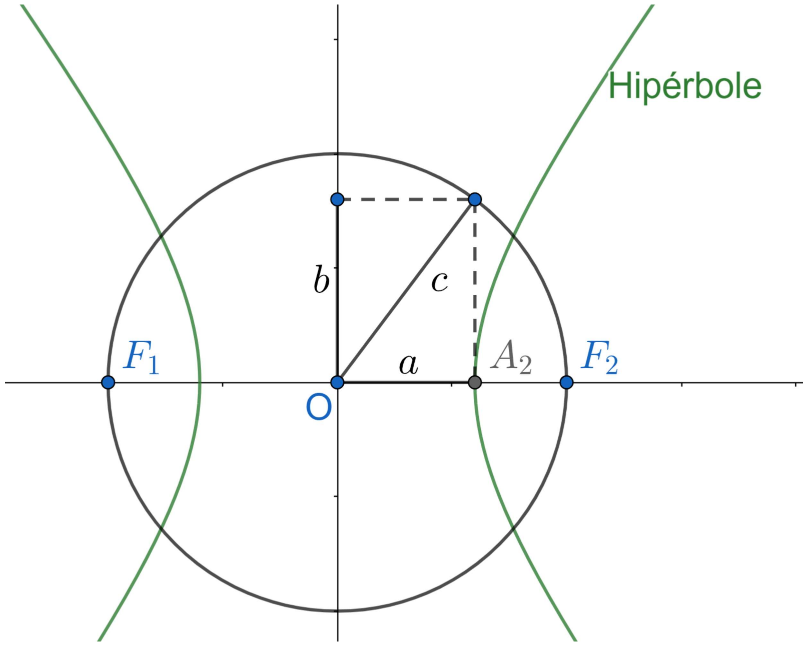
Figura D.7 – Construção das assíntotas



Fonte: Próprio autor.

Construindo uma circunferência de raio c, centrada na origem, note que c é a distância do foco ao centro da hipérbole. Construindo um retângulo de lado a e b, como mostra a Figura D.8.

Figura D.8 – Construção da circunferência



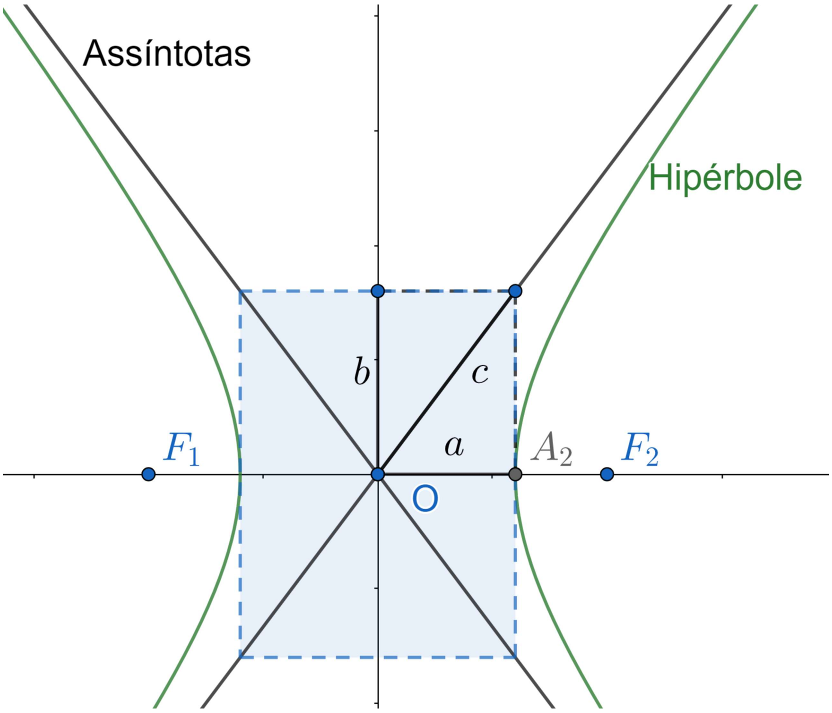
Fonte: Próprio autor.

Observe a Figura D.8 que existe um triângulo retângulo, de catetos a, b e hipotenusa c. Aplicando o Teoremas de Pitágoras temos que,

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

De maneira similar, construímos os outros retângulos utilizando uma diagonal da hipérbole como um de seus lados. Em seguida, estendemos as diagonais desses retângulos para obter as assíntotas da hipérbole, conforme ilustrado na Figura (D.9).

Figura D.9 – Construção do retângulo de base das assíntotas



Fonte: Próprio autor.

D.2 EQUAÇÃO REDUZIDA DA HIPÉRBOLE

Para facilitar a compreensão da dedução da equação reduzida da elipse, vamos considerar primeiramente o caso da elipse centrada na origem. Além disso, consideraremos o caso em que o eixo focal da elipse está sobre o eixo das abcissas do sistema de coordenadas. Neste caso teremos que as coordenadas dos focos podem ser escritas como $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Além disso, dado um ponto $X = (x, y)$ qualquer da elipse, este deverá satisfazer:

$$
\begin{aligned}
& |d(X, F_1) - d(X, F_2)| = 2a \\
\Rightarrow\ & |\sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} - \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2}| = 2a \\
\Rightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a \\
\Rightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.
\end{aligned}
$$

Elevando ambos os lados ao quadrado obtemos,

$$
\begin{aligned}
& (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\Rightarrow\ & x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2 \\
\Rightarrow\ & 4xc - 4a^2 = \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} \\
\Rightarrow\ & xc - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.
\end{aligned}
\tag{D.1}
$$

Note que todo número real elevado ao quadrado é um número positivo, então quando elevar a Equação (D.1) ao quadrado, o lado da igualdade que possui $\pm$ se tornará positivo, portanto,

$$\begin{aligned} & x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2[(x-2)^2 + y^2] \\ \Rightarrow \ & x^2c^2 - 2xca^2 + a^4 = a^2x^2 - 2xca^2 + a^2c^2 + a^2y^2 \\ \Rightarrow \ & x^2c^2 - a^2x^2 - a^2y^2 = a^2c^2 - a^4 \\ \Rightarrow \ & x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \end{aligned} \tag{D.2}$$

Da Equação (D.1) temos que $c^2 - a^2 = b^2$.Substituindo $c^2 - a^2$ por b^2 na Equação (D.2) obtemos,

$$x^2b^2 - y^2a^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2,

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} - \frac{y^2a^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

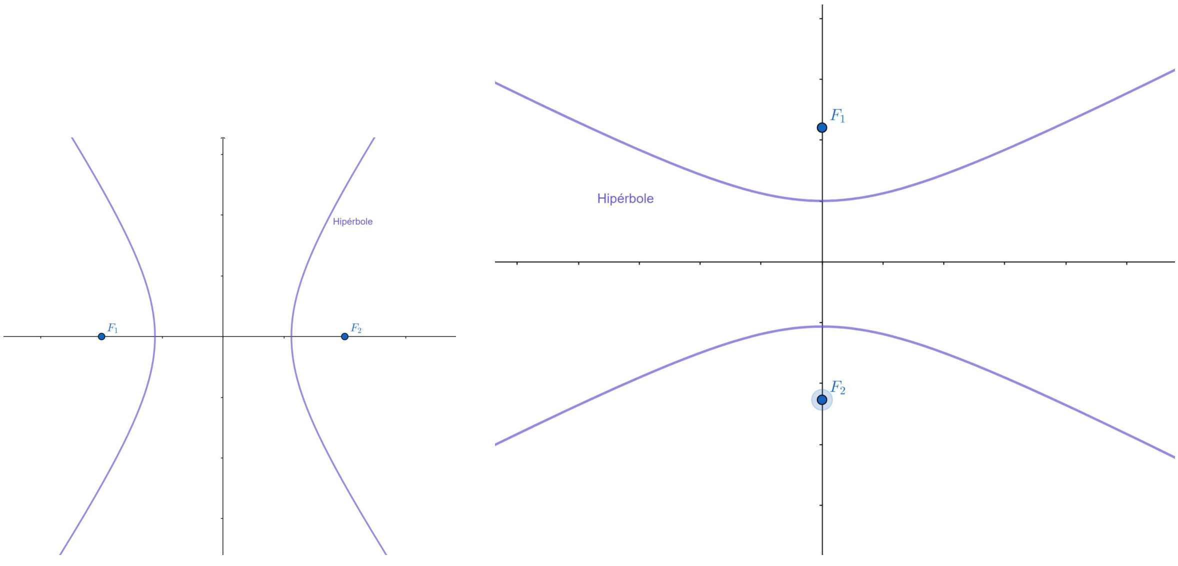
donde segue a **Equação Reduzida da Hipérbole** (caso em que a hipérbole está centrada na origem e com Eixo Focal sobre o Eixo x).

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{D.3}$$

Note que na dedução da equação da hipérbole realizada consideramos o Eixo Focal sobre o Eixo x, como a hipérbole da Figura D.10(a). Para o caso em que os focos estão sobre o Eixo y (Figura D.10(b)), ainda centrada na origem, a dedução é análoga e obtêm-se a **Equação Reduzida da Hipérbole**:

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{D.4}$$

Figura D.10 – Exemplos de Hipérboles com Eixo Focal sobre o Eixo x e sobre o Eixo y.

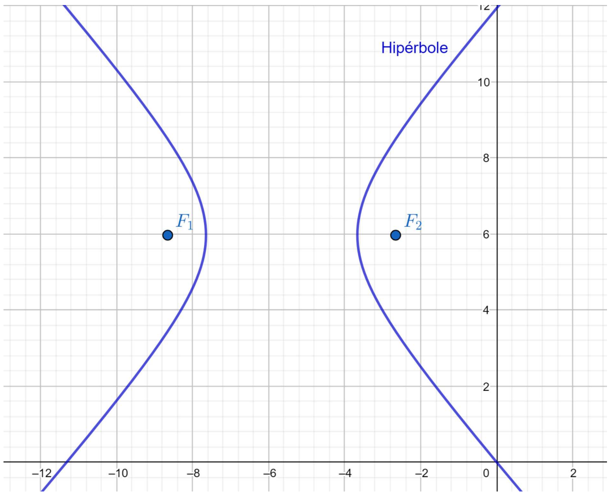


(a) (b)

Fonte: Próprio autor.

Consideremos agora o caso em que a cônica não esteja centrada na origem, isto é, que $C = (x_0, y_0) \neq (0,0)$, e com Eixo Focal paralelo ao Eixo x. Intuitivamente, basta realizar uma translação no sistema de coordenadas que recairemos nos casos anteriores. Isto é, consideraremos o sistema de coordenadas com origem no ponto C e com Eixos $E_{\tilde{x}}$ e $E_{\tilde{y}}$ paralelos aos eixos do sistema de coordenadas original E_x e E_y, respectivamente, como mostra a Figura D.11.

Figura D.11 – Assíntotas



Fonte: Próprio autor.

Como neste novo sistema de coordenadas a hipérbole está centrada na origem e com eixo Focal sobre o Eixo $\tilde{x}$, a sua equação reduzida será

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} - \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1.$$

Mas podemos relacionar as novas variáveis, com respeito as antigas, da seguinte forma: $\tilde{x} = x - x_0$ e $\tilde{y} = y - y_0$. Então, no sistema de coordenada original, a **Equação Reduzida da Hipérbole** será

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{D.5}$$

Note que o caso em que o centro da hipérbole é $C = (x_0, y_0) \neq (0,0)$ e o Eixo Focal da hipérbole é paralelo ao Eixo y do sistema de coordenadas, poderemos proceder da mesma maneira, donde obteremos a

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} - \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1. \tag{D.6}$$

Note que, no caso em que o centro da Hipérbole está na origem do sistema de coordenadas, as Equações (D.5) e (D.6) recairão nas Equações (D.3) e (D.4), respectivamente. Desta forma podemos a elipse admite as possibilidade de **Equações Reduzidas** descritas na Tabela D.1.

Tabela D.1 – Equação geral da hipérbole de acordo com a posição relativa

Equação	Condição	Figura
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$	Eixo Focal da hipérbole é paralelo ao Eixo x do sistema de coordenadas	Figura D.4(c)
$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} - \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1.$	Eixo Focal da hipérbole é paralelo ao Eixo y do sistema de coordenadas	Figura D.4(a)

Fonte: Próprio autor.

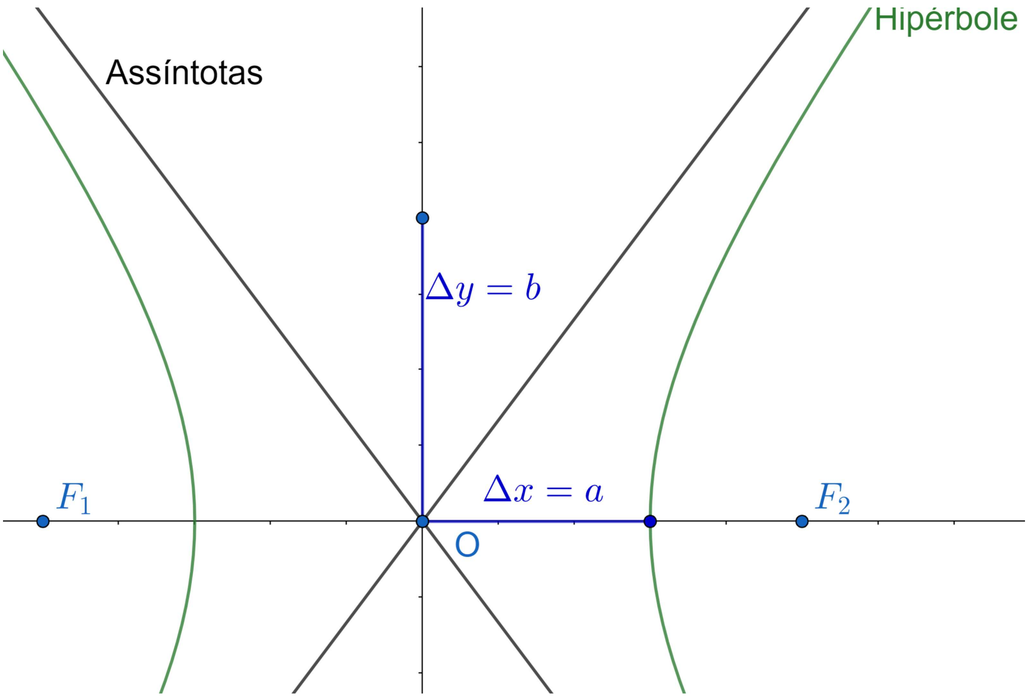
Para o caso em que o Eixo Focal da hipérbole não é paralelo a nenhum dos eixos do sistema de coordenadas, como no caso da Figura D.4(d), a equação da hipérbole não será mais chamada de equação reduzida pois ela torna-se mais complexa e não será abordada neste trabalho.

Optou-se em demonstrar o fato onde os focos da hipérbole estão na mesma coordenada, pois o reconhecimento deste lugar geométrico tender as assíntotas, não é trivial. Análise e a demonstração desta ocasião na maioria dos livros é ocultada.

Note que não basta utilizar a definição, como foi realizado na demonstração da elipse que gerou a circunferência, então necessitou de um caminho alternativo. A ideia da demonstração é calcular o limite onde a distância focal (2c), tende para zero, gerando as assíntotas.

Observe que o coeficiente angular de uma reta é dada por, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$

Figura D.12 – Assíntotas



Fonte: Próprio autor.

Na Figura D.12 observe que $\Delta y = b$ e $\Delta x = a$, então $m = b/a \Leftrightarrow b = ma$, onde m é o coeficiente angular da assíntota. O objetivo é encontrar as equações das assíntotas, $y = \pm mx$.

Proposição D.1. *Dado uma sequência C_n tendendo a zero. Então existe uma sequência de Hipérboles H, tal que H_n tenda as assíntotas.*

Demonstração D.1.

Fixado a e c, existe um b tal que, $a^2 + b^2 = c^2$ e seja $m = b/a \Leftrightarrow b = ma$.

Definida H_n uma sequência de hipérboles que, para cada n existe um a_n e c_n que vale a relação,

$$a_n^2 + b_n^2 = c_n^2. \tag{D.7}$$

Como $b = ma$, substituindo na Equação (D.7), obteremos

$$\begin{aligned} & a_n^2 + (m.a_n)^2 = c_n^2 \\ \Rightarrow \quad & a_n^2 + m^2 a_n^2 = c_n^2 \\ \Rightarrow \quad & a_n^2(1+m^2) = c_n^2 \qquad \text{(D.8)} \\ \Rightarrow \quad & a_n^2 = \frac{c_n^2}{m^2+1} \\ \Rightarrow \quad & a_n = \frac{c_n}{\sqrt{m^2+1}}. \qquad \text{(D.9)} \end{aligned}$$

Assim,

$$\left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = \frac{c_n^2 - a_n^2}{a_n^2}.$$

Substituindo a Equação (D.9), na Equação (D.8) obtemos,

$$\begin{aligned} \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 &= \frac{a_n^2(m^2+1) - a_n^2}{a_n^2} \\ \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 &= m^2 \\ \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} &= m \end{aligned}$$

Ou seja, para todo n, H_n terá o coeficiente angular igual. Assim a equação será,

$$\begin{aligned} & \frac{x^2}{a_n^2} - \frac{y^2}{b_n^2} = 1 \\ \Rightarrow \quad & \frac{x^2 b_n^2 - y^2 a_n^2}{a_n^2 b_n^2} = \frac{a_n^2 b_n^2}{a_n^2 b_n^2} \\ \Rightarrow \quad & -y^2 a_n^2 = a_n^2 b_n^2 - x^2 b_n^2 \\ \Rightarrow \quad & y^2 = \frac{x^2 b_n^2 - a_n^2 b_n^2}{a_n^2} \\ \Rightarrow \quad & y^2 = \frac{x^2 b_n^2}{a_n^2} - b_n^2. \end{aligned}$$

Como,

$$
\begin{aligned}
& \left(\frac{b_n}{a_n}\right)^2 = m^2 \\
\Rightarrow \quad & y^2 = x^2 m^2 - b_n^2 \\
\Rightarrow \quad & \lim_{n \to 0} y^2 = \lim_{n \to 0} m^2 x^2 - b_n^2 \\
\Rightarrow \quad & y^2 = m^2 x^2 \\
\Rightarrow \quad & y = \pm m x.
\end{aligned}
$$

□