

Θεώρημα χορδής και εφαπτομένης – Λύσεις φυλλαδίου (ΘΧΕ)

1. Παρόμοια με τις ασκήσεις 12.1 – 12.4

$$\omega = 2 \cdot \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 2 \cdot 65^\circ = 130^\circ \quad (\text{σχέση εγγ. - επίκ.})$$

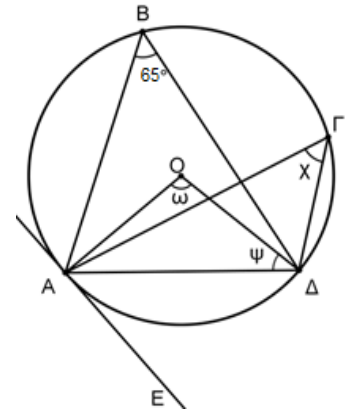
$$x = \hat{B} = 65^\circ \quad (\text{εγγ. που βαίνουν στο ίδιο τόξο})$$

ΟΑΔ ισοσκελές, άρα $\hat{O}\hat{A}\hat{\Delta} = \hat{O}\hat{\Delta}\hat{A} = \psi$ και

$$\hat{O}\hat{A}\hat{\Delta} + \hat{O}\hat{\Delta}\hat{A} + \hat{O} = 180^\circ \Rightarrow 2\psi + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow \psi = 25^\circ$$

$$\hat{\Delta}\hat{A}\hat{E} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = 65^\circ \quad (\Theta.X.E.) \quad \text{και}$$

$$\hat{O}\hat{A}\hat{E} = 90^\circ \quad (\text{γωνία εφαπτ. - ακτίνας})$$



2. Παρόμοια με την άσκηση 12.5

$$\text{Είναι } \hat{B}\hat{\Gamma} = \hat{B}\hat{K}\hat{\Gamma} = 5x - 5^\circ$$

(σχ. επίκεντρης - τόξου)

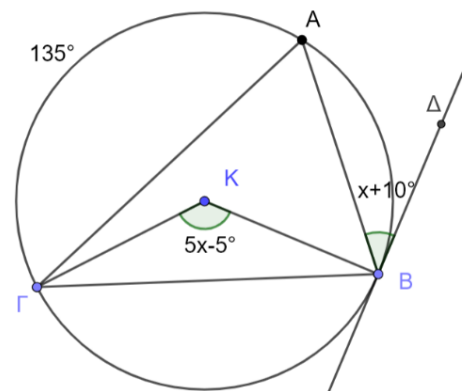
$$\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Delta} = x + 10^\circ \quad (\Theta.X.E.) \quad \text{και}$$

$$\hat{A}\hat{B} = 2\hat{A}\hat{\Gamma}\hat{B} = 2(x + 10^\circ) = 2x + 20^\circ \quad (\text{σχ. εγγ. - αντίστοιχου τόξου})$$

$$\text{Είναι } \hat{A}\hat{\Gamma} + \hat{B}\hat{\Gamma} + \hat{A}\hat{B} = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 135^\circ + 5x - 5^\circ + 2x + 20^\circ = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x + 150^\circ = 360^\circ \Rightarrow 7x = 210^\circ \Rightarrow x = 30^\circ$$



3.

$\varphi = \widehat{B\Gamma\Delta} = 50^\circ$ (εγγεγραμ. που βαίνουν σε ίσα τόξα)

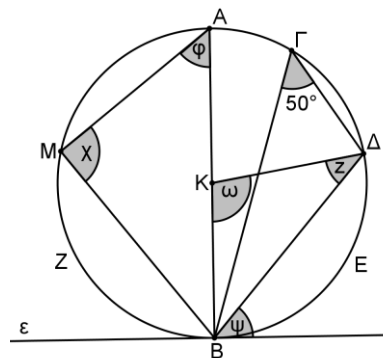
$\chi = 90^\circ$ (εγγ. σε ημικύκλιο)

$\psi = \widehat{B\Gamma\Delta} = 50^\circ$ (Θ.Χ.Ε.),

$\omega = 2\widehat{B\Gamma\Delta} = 100^\circ$ (σχέση εγγ. - επίκεντρης)

στο $\widehat{K\Delta B}$:

$$\widehat{K} + \widehat{\Delta} + \widehat{B} = 180^\circ \Rightarrow 100^\circ + z + z = 180^\circ \Rightarrow z = 40^\circ$$



4.

$\widehat{\Delta} = \widehat{T\Gamma B} = 40^\circ$ (Θ.Χ.Ε.)

Έστω $\widehat{\Sigma\Gamma\Delta} = \varphi$, θα είναι και $\widehat{B\Gamma\Delta} = \varphi$ (ΓΔ διχοτόμος)

$$\text{άρα: } \widehat{\Sigma\Gamma\Delta} + \widehat{B\Gamma\Delta} + \widehat{T\Gamma B} = 180^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi + \varphi + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \varphi = 70^\circ$$

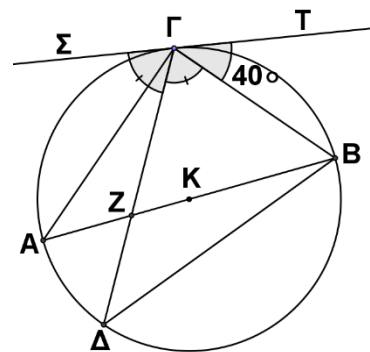
Επίσης $\widehat{A\Gamma B} = 90^\circ$ και

$$\widehat{A\Gamma\Delta} = \widehat{A\Gamma B} - \widehat{\Delta\Gamma B} = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$$

$$\widehat{A\hat{B}\Delta} = \widehat{A\Gamma\Delta} = 20^\circ$$

Επομένως στο τρίγωνο $\widehat{B\hat{\Delta}Z}$ θα είναι:

$$\widehat{A\hat{B}\Delta} + \widehat{\Delta} + \widehat{\Delta\hat{Z}B} = 180^\circ \Rightarrow 20^\circ + 40^\circ + \widehat{\Delta\hat{Z}B} = 180^\circ \Rightarrow \widehat{\Delta\hat{Z}B} = 120^\circ$$



5.

$$\beta = \frac{\widehat{B\hat{K}\Gamma}}{2} = \frac{80^\circ}{2} = 40^\circ \text{ (σχέση εγγ. - επίκεντρης)}$$

$$\alpha = \beta = 40^\circ \text{ (Θ.Χ.Ε.)}$$

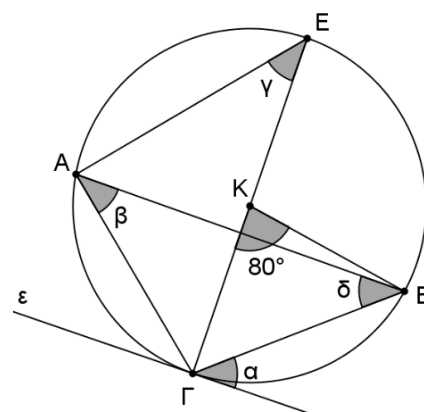
Είναι $\widehat{B\Gamma} = \widehat{B\hat{K}\Gamma} = 80^\circ$ και αν θέσουμε $\widehat{A\Gamma} = x$,

τότε θα είναι: $\widehat{AEB} = 3x$

$$\widehat{B\Gamma} + \widehat{A\Gamma} + \widehat{AEB} = 360^\circ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 80^\circ + x + 3x = 360^\circ \Rightarrow x = 70^\circ$$

$$\delta = \frac{\widehat{A\Gamma}}{2} = \frac{70^\circ}{2} = 35^\circ \text{ (σχέση εγγ. - αντίστοιχου τόξου)}$$



6. Παρόμοια με την άσκηση 12.5

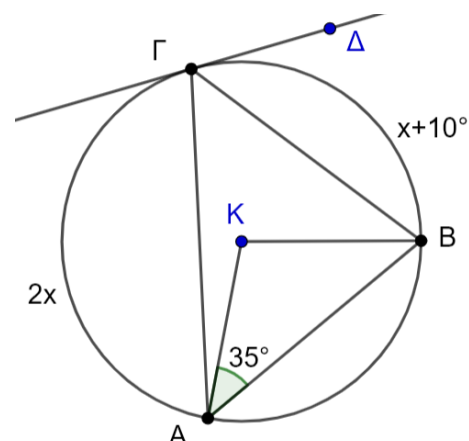
Φέρνουμε βοηθητική την ΚΒ

Στο ισοσκελές ΚΑΒ είναι: $\hat{ΚΒΑ} = \hat{ΚΑΒ} = 35^\circ$

Άρα $\hat{ΑΚΒ} + \hat{ΚΒΑ} = \hat{ΚΑΒ} = 180^\circ \Rightarrow \hat{ΑΚΒ} = 110^\circ$

$$\hat{ΑΓΒ} = \frac{\hat{ΑΚΒ}}{2} = 55^\circ \quad (\text{σχέση εγγ. - τόξου})$$

β) $\hat{ΑΒ} = \hat{ΑΚΒ} = 110^\circ$ (σχέση επίκεντρης - τόξου)



$$\hat{ΑΓ} + \hat{ΒΓ} + \hat{ΑΒ} = 360^\circ \Rightarrow 2x + x + 10^\circ + 110^\circ = 360^\circ \Rightarrow x = 80^\circ$$

Άρα $\hat{ΑΓ} = 2 \cdot 80^\circ = 160^\circ$ και $\hat{ΒΓ} = 90^\circ$

$$\hat{ΑΒΓ} = \frac{\hat{ΑΓ}}{2} = 80^\circ \quad \text{και} \quad \hat{ΒΑΓ} = \frac{\hat{ΒΓ}}{2} = 45^\circ \quad \text{άρα και}$$

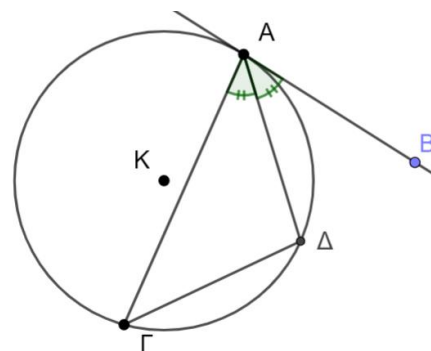
$$\hat{ΒΓΔ} = \hat{ΒΑΓ} = 45^\circ \quad (\Theta.X.E.)$$

Θεωρητικές - Αποδεικτικές ασκήσεις

7. $\hat{ΑΓΔ} = \hat{ΒΑΔ}$ (Θ.Χ.Ε.) και

$\hat{ΓΑΔ} = \hat{ΒΑΔ}$ (ΑΔ διχοτόμος)

Επομένως $\hat{ΑΓΔ} = \hat{ΓΑΔ}$, άρα ΑΔΓ ισοσκελές με $ΑΔ = ΓΔ$

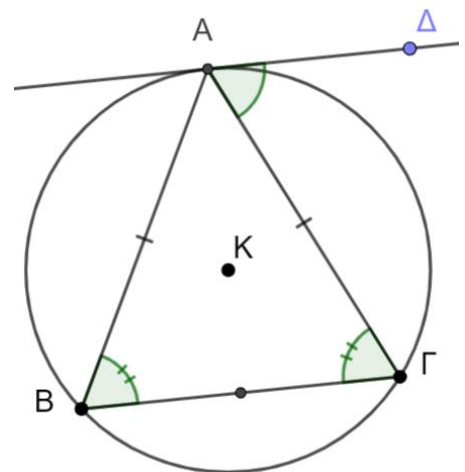


8. Είναι: $\hat{\Gamma} = \hat{B}$ (παρά τη βάση ισοσκελούς)

και $\Delta\hat{A}\Gamma = \hat{B}$ (Θ.Χ.Ε.)

Επομένως θα είναι και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\Gamma$

και επομένως οι ευθείες ΑΔ και ΒΓ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες και άρα είναι παράλληλες.

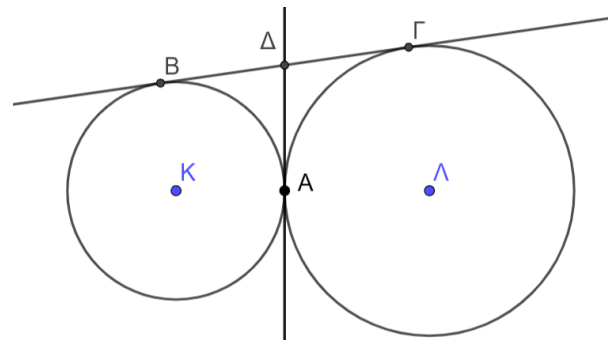


9. Στον κύκλο (K, ρ) είναι $B\Delta = \Delta A$

και στον κύκλο (Λ, R) $\Gamma\Delta = \Delta A$

(εφαπτόμενα τμήματα ίσα)

Επομένως $B\Delta = \Gamma\Delta$



10.

α) Φέρνουμε βοηθητική την ΕΓ

Είναι $A\hat{B}\Gamma = B\hat{E}\Gamma$ (Θ.Χ.Ε.)

και $A\hat{\Gamma}B = B\hat{E}\Gamma$ (Θ.Χ.Ε.)

Επομένως θα είναι και $A\hat{B}\Gamma = A\hat{\Gamma}B$

άρα το $A\hat{B}\Gamma$ είναι ισοσκελές.

β) Ονομάζουμε $\Gamma\hat{B}\Delta = \varphi$ και

$\Gamma\hat{B}E = \omega$

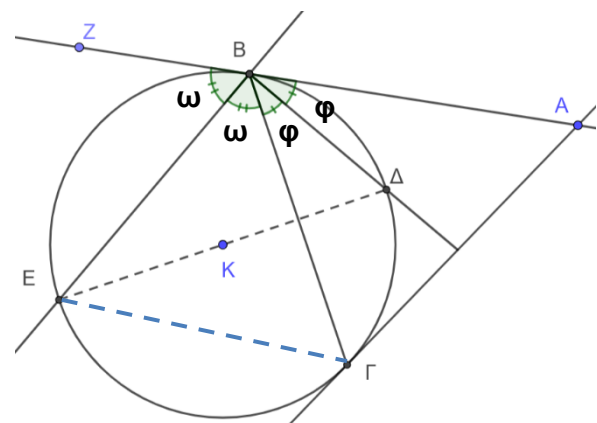
Είναι $A\hat{B}\Delta = \Gamma\hat{B}\Delta = \varphi$ και $Z\hat{B}E = \Gamma\hat{B}E = \omega$

Επειδή $A\hat{B}Z = 180^\circ$, είναι:

$$2\varphi + 2\omega = 180^\circ \Rightarrow 2(\varphi + \omega) = 180^\circ \Rightarrow \varphi + \omega = 90^\circ$$

Επομένως $E\hat{B}\Delta = \varphi + \omega = 90^\circ$

και επομένως επειδή είναι εγγεγραμμένη, θα βαίνει σε ημικόκλιο. Άρα το τμήμα ΔΕ είναι διάμετρος.



11.

Ονομάζουμε $\hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \varphi$ και $\hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = \omega$.

Επειδή ABE ισοσκελές, θα είναι $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{A}\hat{B}\hat{E} = \varphi + \omega$

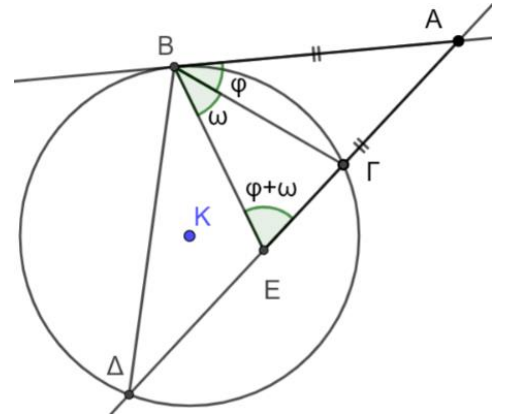
Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{E}\hat{B}\hat{\Delta} = \varphi$.

Είναι $\hat{\Delta} = \hat{A}\hat{B}\hat{\Gamma} = \varphi$ (Θ.Χ.Ε.)

Η $\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma}$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B\Delta E$, και επομένως θα ισχύει:

$$\hat{B}\hat{E}\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} + \hat{E}\hat{B}\hat{\Delta} \Rightarrow \varphi + \omega = \varphi + \hat{E}\hat{B}\hat{\Delta} \Rightarrow \hat{E}\hat{B}\hat{\Delta} = \omega$$

Επομένως $\hat{E}\hat{B}\hat{\Delta} = \hat{E}\hat{B}\hat{\Gamma} = \omega$ και άρα η BE διχοτομεί τη γωνία $\hat{\Gamma}\hat{B}\hat{\Delta}$.



12.

Φέρουμε βοηθητικές εγγεγραμμένες γωνίες Δ και Z στους δύο κύκλους.

Έχουμε διαδοχικά:

$$\hat{B}_1 = \hat{\Delta} \text{ (Θ.Χ.Ε.)}, \quad \hat{\Delta} = \hat{A}_1 \text{ (Θ.Χ.Ε.)},$$

$$\hat{A}_1 = \hat{A}_2 \text{ (ως κατακορυφήν)}$$

$$\hat{A}_2 = \hat{Z} \text{ (Θ.Χ.Ε.) ΚΑΙ } \hat{Z} = \hat{\Gamma}_1 \text{ (Θ.Χ.Ε.)}$$

Επομένως θα έχουμε τελικά $\hat{B}_1 = \hat{\Gamma}_1$ και άρα οι εφαπτομένες στα B και Γ σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες τους ίσες, άρα θα είναι μεταξύ τους παράλληλες.

