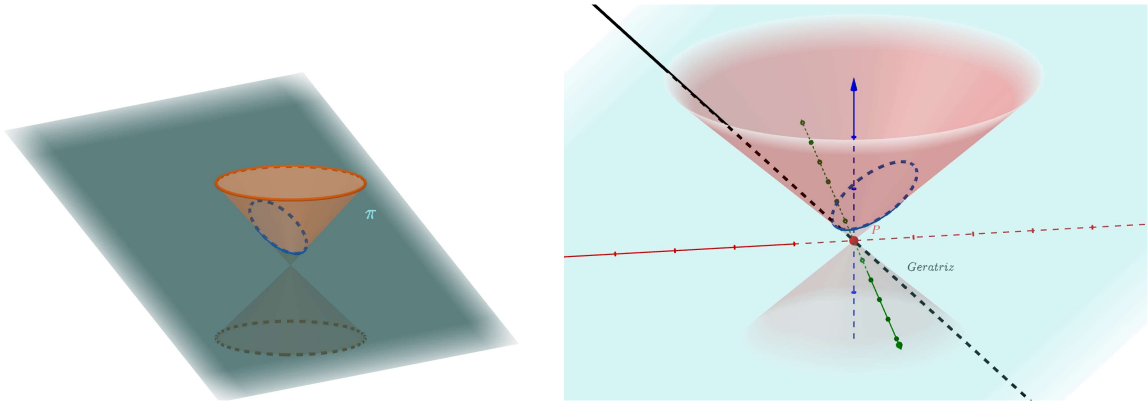
APÊNDICE C – EMBASAMENTO TEÓRICO: ELIPSE

Conforme visto anteriormente, a elipse pode ser visualizada como resultado da interseção de um cone duplo com um plano (Figura C.1).

Figura C.1 – Elipse gerada por uma interseção.



(a) (b)

Fonte: Próprio autor.

Todavia, para estudar as propriedades desta curva é mais conveniente explorá-la partindo da sua descrição geométrica. Por isto consideraremos aqui a definição da elipse via Lugar Geométrico. Para tal usaremos o conceito de distância entre pontos. Isto é, dados dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ do plano, consideraremos a distância entre P_1 e P_2, denotada por $d(P_1, P_2)$ por

$$d(P_1, P_2) = ||\overline{P_1P_2}|| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

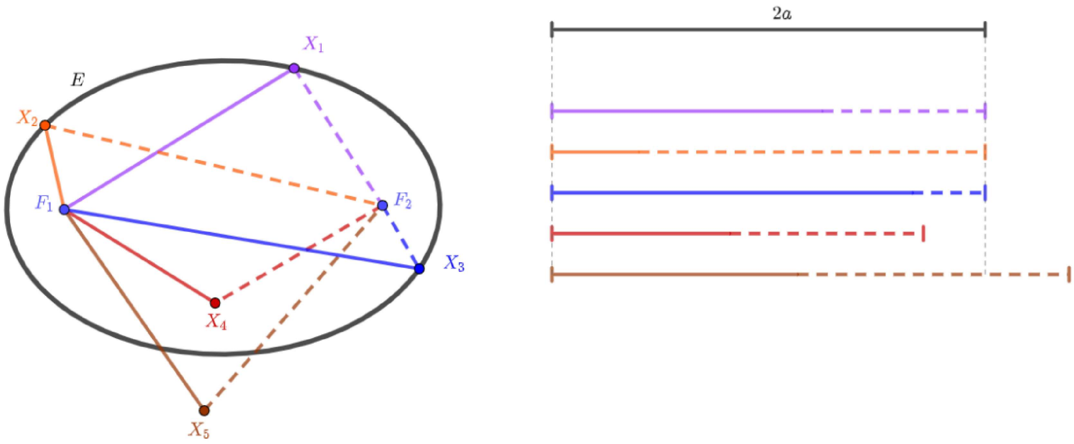
Definição C.1. *Chama-se **elipse** o lugar geométrico E dos pontos X de um plano tais que soma das distâncias de X a dois pontos fixos distintos F_1 e F_2 deste plano é constante. Ou seja*

$$d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a,$$

onde a é um número real tal que $2a > d(F_1, F_2)$.

A Figura C.2 ilustra a definição da elipse.

Figura C.2 – Elipse: ilustração da definição



Fonte: Próprio autor.

Note que o ponto X_1 (cor lilás) satisfaz a condição de que $d(X_1, F_1) + d(X_1, F_2) = 2a$. Para visualizar este fato, o lado direito da figura apresenta um segmento horizontal de tamanho $2a$ (em preto) e apresenta logo abaixo outro segmento horizontal (cor lilás) formado por uma parte de tamanho correspondente ao segmento $\overline{X_1F_1}$ (linha contínua) seguido por outra parte com tamanho igual ao do segmento $\overline{X_1F_2}$ (linha tracejada). Logo é possível visualizar que ambos medem $2a$. O mesmo ocorre para os pontos X_2 (cor alaranjada) e X_3 (cor azul). Portanto, os X_1, X_2 e X_3 são pontos desta elipse. Todavia, no caso do ponto X_4 (cor vermelha) teremos que $d(X_4, F_1) + d(X_4, F_2) < 2a$, enquanto para X_5 (cor marrom) teremos $d(X_5, F_1) + d(X_5, F_2) > 2a$. Ou seja, X_4 e X_5 não pertencem a esta elipse.

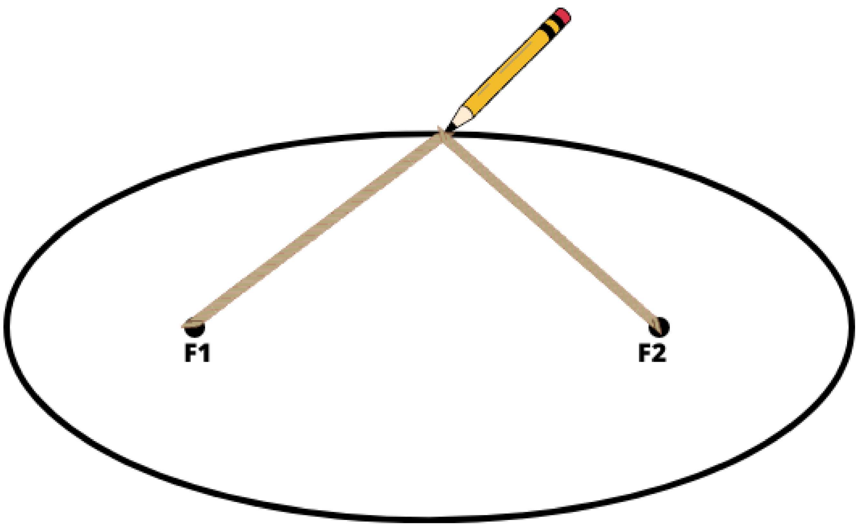
Na Definição C.1 aparece a condição $d(F_1, F_2) < 2a$. Para entender o motivo desta exigência, observe que a desigualdade triangular nos fornece que

$$d(F_1, F_2) = ||\overline{F_1, F_2}|| = ||\overline{F_1, X} + \overline{X, F_2}|| \leq ||\overline{F_1, X}|| + ||\overline{X, F_2}|| = d(X, F_2) + d(X, F_2).$$

Logo, se $d(F_1, F_2) > 2a$, nenhum ponto X terá como satisfazer a condição $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$ (em outras palavras, o resultado do lugar geométrico seria o conjunto vazio). No caso de $d(F_1, F_2) = 2a$, então apenas um único ponto X irá satisfazer a condição $d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a$, e este ponto será o ponto médio entre F_1 e F_2. Alguma referências classificam estes casos como “elipses degeneradas”.

Uma maneira de construir um esboço de uma elipse é usando um barbante de tamanho $2a$. Para tal deve-se ficar as extremidades do barbante nos pontos F_1 e F_2. Em seguida usar um lápis para esticar o barbante e, mantendo sempre o barbante esticado, mover o lápis ao redor dos pontos de fixação do barbante para esboçar os pontos que pertencem a esta elipse.

Figura C.3 – Esboço da elipse utilizando lápis e barbante

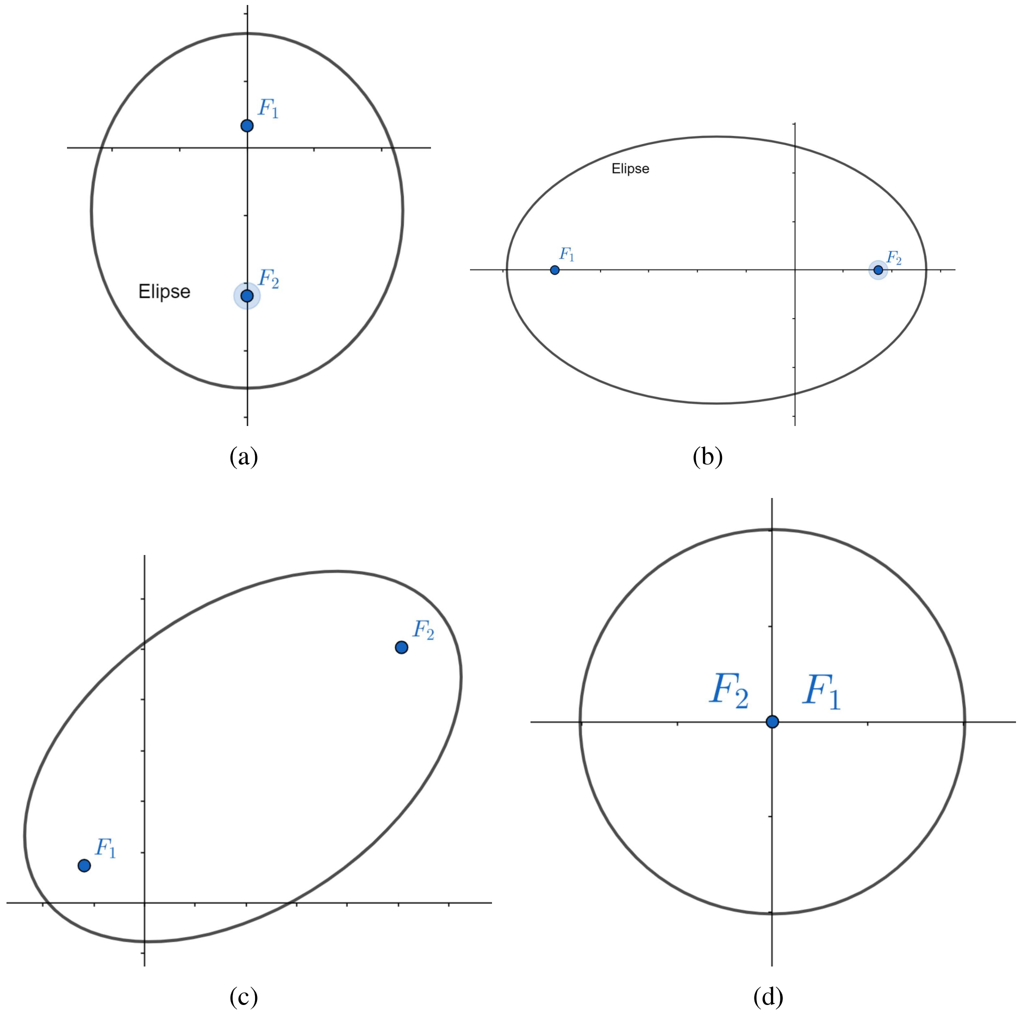


Fonte: Próprio autor.

Note que, caso o barbante seja menor ou igual que a distância entre os pontos F_1 e F_2, não teremos a "sobra" do barbante para então obter os pontos desejados. É por isso que a Definição C.1 exige que $d(F_1, F_2) < 2a$.

Na Figura C.4 podem ser vistos mais alguns exemplos de elipses. Note que a elipse não precisa ter uma posição específica em relação ao sistema de coordenadas. Isto é, pode estar com a parte mais alongada paralela ao Eixo y (Figura C.4(a)), ou então paralela ao Eixo x (Figura C.4(b)), ou mesmo não estar paralela a nenhum dos eixos (Figura C.4(c)). O centro da elipse (ponto médio entre os pontos F_1 e F_2) também não precisa ter nenhum posicionamento específico em relação ao sistema de coordenadas. Além disso, note que quando os pontos fixos F_1 e F_2 coincidam, o resultado será uma circunferência (Figura C.4(d)). Ou seja, a circunferência é um caso particular de elipse. Este fato será justificado apropriadamente adiante, após a dedução da equação reduzida de elipse.

Figura C.4 – Exemplo de elipses



Fonte: Próprio autor.

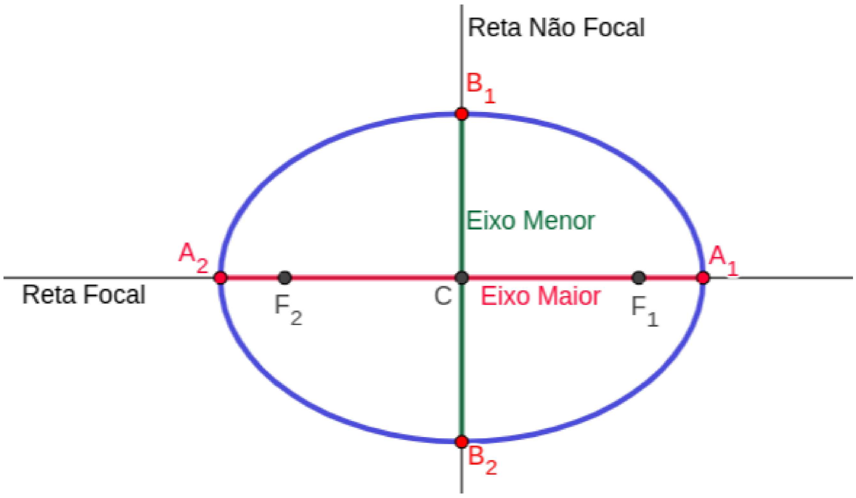
C.1 ELEMENTOS DA ELIPSE

Para compreendermos melhor esta curva, é importante obter uma forma de caracterizá-la através de uma equação. Todavia, para tal será importante estabelecer previamente os elementos e as nomenclaturas desta seção cônica. Os principais elementos da elipse estão listados abaixo e podem ser visualizados na Figura C.5.

- Focos: pontos fixos F_1 e F_2;
- Centro: ponto médio de F_1 e F_2 (denotado por C);
- Reta Focal: reta que contém os focos (denotada por r_1);
- Reta Não Focal: reta perpendicular à reta focal e que passa pelo centro (denotada por r_2);
- Vértices: pontos da elipse que interceptam a reta focal (denotados por A_1 e A_2) e a reta não-focal (denotados por B_1 e B_2);

- Eixo Maior: segmento cujas extremidades são os vértices pertencentes a reta focal ($\overline{A_1A_2}$);
- Eixo Menor: segmento cujas extremidades são os vértices pertencentes a reta não-focal ($\overline{B_1B_2}$).

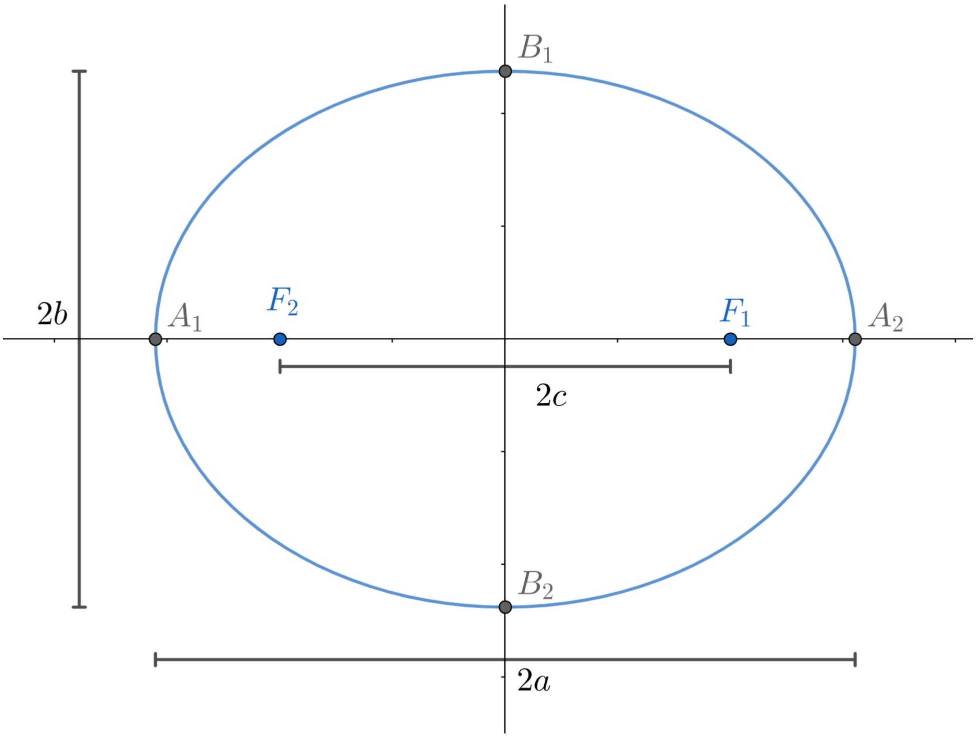
Figura C.5 – Elementos da elipse.



Fonte: (BOBKO, 2017).

A distância entre os focos ($d(F_1, F_2)$) é chamada de **distância focal** e é denotada por $2c$. Vale notar que, da definição da elipse, temos que $d(F_1, F_2) < 2a$. Ou seja, $c < a$. Observe ainda que $2a$ corresponde a distância entre os vértices do eixo maior, isto é, $2a = d(A_1, A_2)$. Logo, $c < a$ está garantindo que os focos F_1 e F_2 fiquem entre os vértice A_1 e A_2 (de forma mais precisa, pertençam ao Eixo Maior), como ilustra a Figura C.6. Uma vez que $2a$ equivale a distância entre os vértices A_1 e A_2, e $2c$ a distância entre os focos, é comum denotar por $2b$ a distância entre os vértices B_1 e B_2.

Figura C.6 – Elementos da elipse.

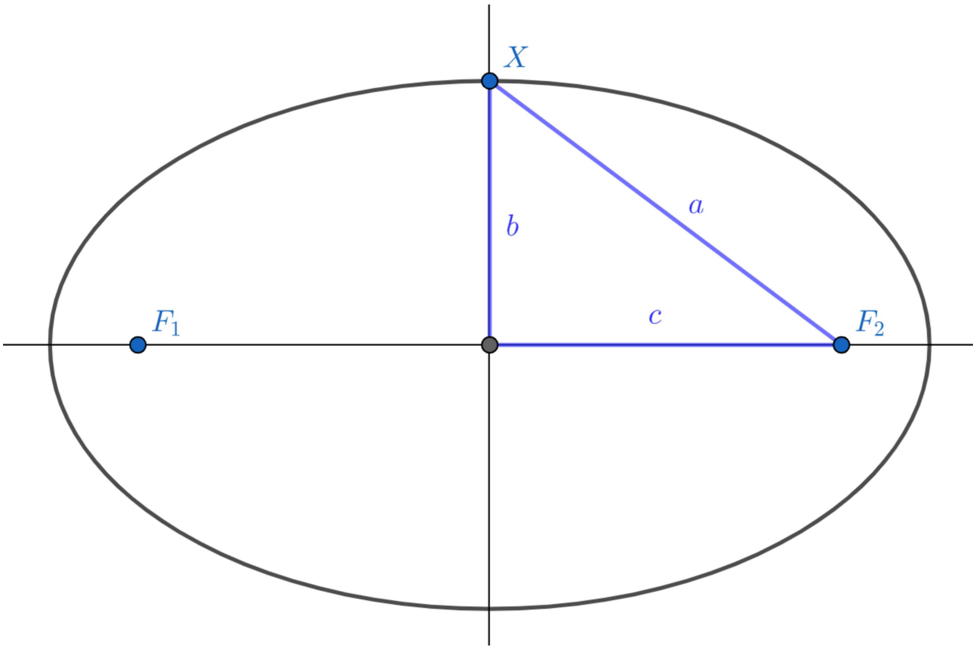


Fonte: Próprio autor.

Estas três constantes, a, b e c, possuem uma relação interessante que será relevante para a obtenção da equação reduzida da elipse. Note que B_1 é um ponto da elipse, logo $d(B_1, F_1) + d(B_1, F_2) = 2a$ e, além disso, este ponto está a equidistante de F_1 e de F_2. Disso segue que a distância de B_1 até o foco F_1 será igual a a. Logo a, b e c podem ser vistos como as medidas dos lados de um triângulo retângulo onde a é a medida da hipotenusa (Figura C.7). Usando o Teorema de Pitágoras segue que

$$a^2 = b^2 + c^2. \tag{C.1}$$

Figura C.7 – Relação entre as constantes a, b e c na elipse.



Fonte: Próprio autor.

C.2 EQUAÇÃO REDUZIDA DA ELIPSE

Para facilitar a compreensão da dedução da equação reduzida da elipse, vamos considerar primeiramente o caso da elipse centrada na origem. Além disso, consideraremos o caso em que o eixo focal da elipse está sobre o eixo das abcissas do sistema de coordenadas. Neste caso teremos que as coordenadas dos focos podem ser escritas como $F_1 = (-c, 0)$ e $F_2 = (c, 0)$. Além disso, dado um ponto $X = (x, y)$ qualquer da elipse, este deverá satisfazer:

$$\begin{aligned} & d(X, F_1) + d(X, F_2) = 2a \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} = 2a \\ \Rightarrow \quad & \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}. \end{aligned}$$

Elevando ambos os lados ao quadrado, obtemos

$$\begin{aligned} & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\ \Rightarrow \quad & 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + (x-c)^2 - (x+c)^2 \\ \Rightarrow \quad & 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4a^2 + x^2 - 2xc + c^2 - x^2 - 2xc - c^2 \\ \Rightarrow \quad & 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 4(a^2 - xc). \end{aligned}$$

Para eliminar as raízes, elevaremos novamente ambos os lados ao quadrado.

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad a^2[(x-c)^2+y^2] = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
&\Rightarrow \quad a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
&\Rightarrow \quad x^2a^2 - 2a^2xc + a^2c^2 + y^2a^2 = a^4 - 2a^2xc + x^2c^2 \\
&\Rightarrow \quad x^2a^2 + y^2a^2 - x^2c^2 = a^4 - a^2c^2 \\
&\Rightarrow \quad x^2(a^2-c^2) + y^2a^2 = a^2(a^2-c^2). \qquad \text{(C.2)}
\end{aligned}$$

Da Equação (C.1) temos que $a^2 - c^2 = b^2$. Substituindo $a^2 - c^2$ por b^2 na Equação (C.2) obtemos,

$$x^2b^2 + y^2a^2 = a^2b^2.$$

Dividindo ambos os lados por a^2b^2 tem-se

$$\frac{x^2b^2}{a^2b^2} + \frac{y^2a^2}{a^2b^2} = \frac{a^2b^2}{a^2b^2}.$$

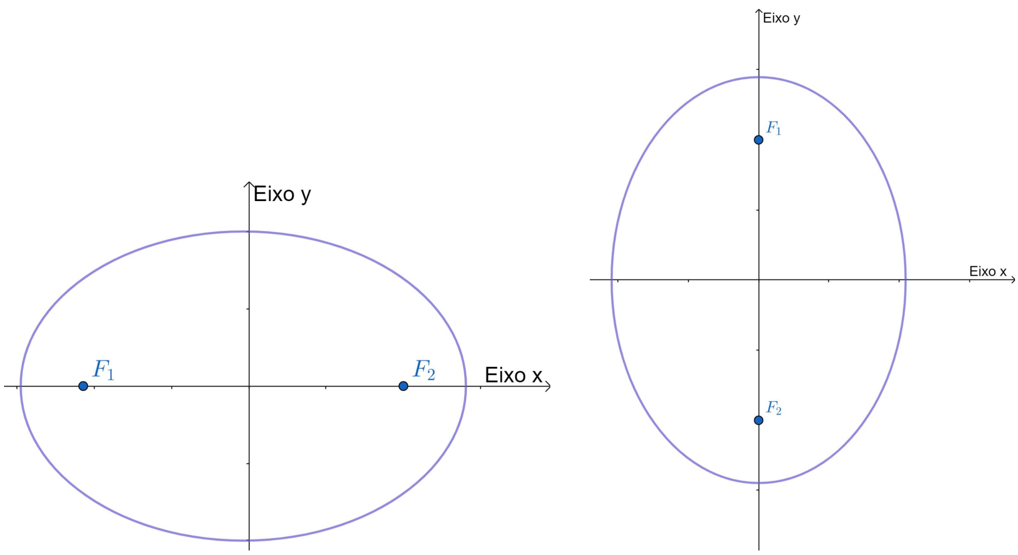
donde segue a **Equação Reduzida da Elipse** (caso em que a elipse está centrada na origem e com Eixo Focal sobre o Eixo x).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \text{(C.3)}$$

Note que na dedução da equação da elipse realizada consideramos o Eixo Focal sobre o Eixo x, como a elipse da Figura C.8(a). Para o caso em que os focos estão sobre o Eixo y (Figura C.8(b)), ainda centrada na origem, a dedução é análoga e obtêm-se a **Equação Reduzida da Elipse**:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \qquad \text{(C.4)}$$

Figura C.8 – Exemplos de Elipses com Eixo Focal sobre o Eixo x e sobre o Eixo y.

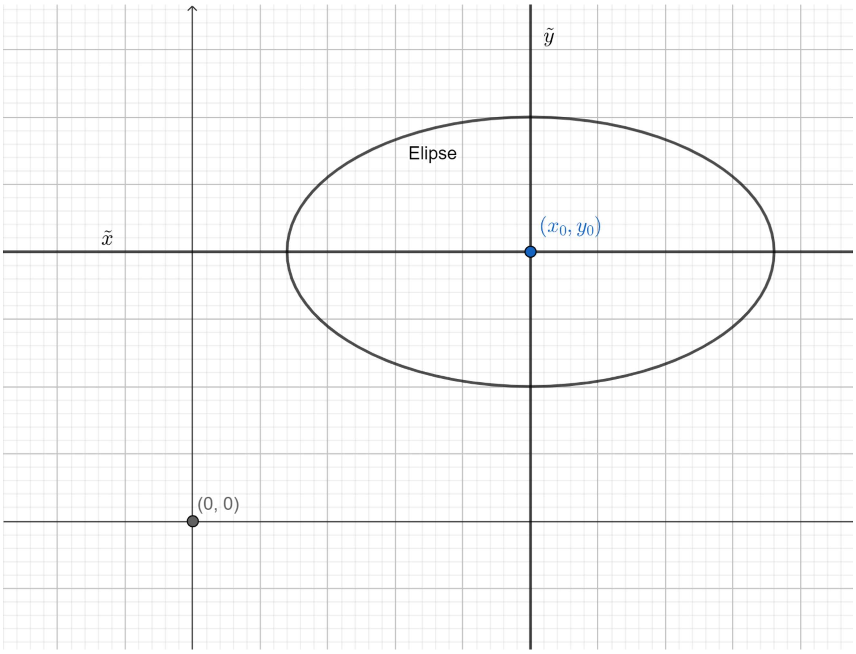


(a) (b)

Fonte: Próprio autor.

Consideremos agora o caso em que a cônica não esteja centrada na origem, isto é, que $C = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, e com Eixo Focal paralelo ao Eixo x. Intuitivamente, basta realizar uma translação no sistema de coordenadas que recairemos nos casos anteriores. Isto é, consideraremos o sistema de coordenadas com origem no ponto C e com Eixos $E_{\tilde{x}}$ e $E_{\tilde{y}}$ paralelos aos eixos do sistema de coordenadas original E_x e E_y, respectivamente, como mostra a Figura C.9.

Figura C.9 – Translação da elipse e do eixo de coordenadas



(a)

Fonte: Próprio autor.

Como neste novo sistema de coordenadas a elipse está centrada na origem e com eixo Focal sobre o Eixo $\tilde{x}$, a sua equação reduzida será

$$\frac{\tilde{x}^2}{a^2} + \frac{\tilde{y}^2}{b^2} = 1.$$

Mas podemos relacionar as novas variáveis, com respeito as antigas, da seguinte forma: $\tilde{x} = x - x_0$ e $\tilde{y} = y - y_0$. Então, no sistema de coordenada original, a **Equação Reduzida da Elipse** será

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1. \tag{C.5}$$

Note que o caso em que o centro da elipse é $C = (x_0, y_0) \neq (0, 0)$ e o Eixo Focal da elipse é paralelo ao Eixo y do sistema de coordenadas, poderemos proceder da mesma maneira, donde obteremos a

$$\frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1. \tag{C.6}$$

Note que, no caso em que o centro da Elipse está na origem do sistema de coordenadas, as Equações (C.5) e (C.6) recairão nas Equações (C.3) e (C.4), respectivamente. Desta forma a elipse admite as possibilidade de **Equações Reduzidas** descritas na Tabela C.1.

Tabela C.1 – Equação geral de acordo com a posição relativa

Equação	Condição	Figura
$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1.$	Eixo Focal da elipse é paralelo ao Eixo x do sistema de coordenadas	Figura C.4(a)
$\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1.$	Eixo Focal da elipse é paralelo ao Eixo y do sistema de coordenadas	Figura C.4(b)

Fonte: Próprio autor.

Para o caso em que o Eixo Focal da elipse não é paralelo a nenhum dos eixos do sistema de coordenadas, como no caso da Figura C.4(c), a equação da elipse não será mais chamada de equação reduzida pois ela torna-se mais complexa e não será abordada neste trabalho.

Conforme mencionamos previamente, no caso em que os focos coincidirem ($F_1 = F_2$) o resultado será uma circunferência. De fato, neste caso teremos que a distância focal será nula, isto é, $c = 0$. Logo, as medidas a e b serão iguais pois são números não negativos e devem obedecer a relação $a^2 = b^2 + c^2 = b^2$ (vide Equação (C.1)). Portanto, com base na Equação (C.5), ou na (C.6), teremos que:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$$
$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = a^2.$$

Mas esta é justamente a equação de uma circunferência de centro $C = (x_0, y_0)$ e raio $r = a$.