DETERMINANTES

Índice:

1. Determinantes de orden dos

Dada la matriz cuadrada de segundo orden

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

El determinante de A es el número

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Si designamos las filas 1 y 2 y las columnas 1 y 2 por $F_1, F_2,\ y\ C_1, C_2$ respectivamente, podemos también representar como $det(A) = det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} = det(C_1, C_2)$. Además

- Si $A=0$ ⇨ $det(A)=0$
- Si $A=I_2$ ⇨ $det(A)=1$
- Si A es diagonal o triangular ⇨ $det(A)=a_{11} . a_{22}$

 # Ejemplos:

1.- $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3\cdot(-1) - 2\cdot 2 = -7$; *2.-* $\begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\ (-1) - (-6)\cdot 1 = 5$

Una matriz cuadrada A es **regular** si y solo si $det(A) \neq 0$

 # Ejemplos:

1.- Como $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 5\cdot 3 - 2\cdot 7 = 1 \neq 0$, *A es una matriz regular.*

2.- Como $|B| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 1\ 6 - 2\cdot 3 = 0$, *B es una matriz singular.*

2. Determinante de orden tres

Dada la matriz de orden tres

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El determinante de A es el número

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{31} - a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

Si designamos las filas 1, 2 y 3 y las columnas 1, 2 y 3 por $F_{1,} F_{2,} F_{3,}\ y\ C_{1,} C_2, C_3$

respectivamente, podemos también representar como $det(A) = det\begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} = det(C_{1,} C_{2,} C_3)$.

Además

- Si $A=0$ ⇨ $det(A)=0$
- Si $A=I_3$ ⇨ $det(A)=1$
- Si A es diagonal o triangular ⇨ $det(A)=a_{11}\,.\,a_{22}\,.\,a_{33}$

 # Ejemplos:

1.- $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -36+0-5-0+30-8 = -19$

2.- $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4+4+0+8-6-0 = 10$

- Una matriz cuadrada A es **regular** si y solo si $det(A) \neq 0$

  # Ejemplo:

  Como $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 24+0+0-0-0-0 = 24 \neq 0$ *, A es regular*

- Para resolver los determinantes de orden tres, es conveniente recordar la REGLA DE SARRUS:
  - Los productos con signo + están formados por los elementos de la diagonal principal y los de las dos diagonales paralelas con su vértice opuesto correspondiente.
  - Los productos con signo menos (-) están formados por los elementos de la diagonal secundaria y los de las dos diagonales paralelas con su vértice opuesto correspondiente.

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}$$

- *Una forma práctica de aplicar la regla de Sarrus es, escribir debajo de la matriz sus dos primeras filas.*
  - *Los términos positivos de la regla de Sarrus serán ahora los términos de la diagonal principal y su dos paralelas.*
  - *Y los términos negativos serán los términos de la diagonal secundaria y sus dos paralelas*

  # Ejemplo:

$$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}=45+96+84-105-48-72=0$$

3. Desarrollo de un determinante por los elementos de una línea

Dado un determinante de orden tres, podemos observar que se cumple

$$\det(A)=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=$$

$$=a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}-a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31}=$$

$$=a_{11}\cdot\left(a_{22}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{32}\right)-a_{12}\cdot\left(a_{21}\cdot a_{33}-a_{23}\cdot a_{31}\right)+a_{13}\cdot\left(a_{21}\cdot a_{32}-a_{22}\cdot a_{31}\right)=$$

$$=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Es decir, se puede obtener mediante la suma de los determinantes de segundo orden, asociados a los elementos a_{11}, a_{12} *y* a_{13} (*que se obtienen suprimiendo la fila y la columna a la que pertenecen dichos elementos*), y multiplicados cada determinante por dicho número asociado, Además, el signo que lo precede es + o -, según la suma de los subíndices sea par o impar, respectivamente.

Por este procedimiento el determinante de tercer orden, se puede expresar como suma de productos de los elementos de una fila o columna, por determinantes de segundo orden.

Este procedimiento, se puede generalizar para matrices de orden mayor que tres.

MATRIZ COMPLEMENTARIA M_{ij} **DE UN ELEMENTO** a_{ij} **.**

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno de sus elementos. Si en A se suprime la fila i y la columna j, se obtiene una submatriz M_{ij} , que recibe el nombre de **matriz complementaria del elemento** a_{ij} **.**

 # Ejemplo

$$Si \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad M_{23}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{pmatrix}$$

ADJUNTO $Adj\ a_{ij}$ **DE UN ELEMENTO DE UN ELEMENTO** a_{ij} **.**

Sea A una matriz cuadrada y a_{ij} uno de sus elementos. Se denomina **Adjunto del elemento** a_{ij} y se representa por $Adj\ a_{ij}$ al valor

$$Adj\ a_{ij}=(-1)^{i+j} . Det(M_{ij})$$

 # Ejemplo

$$Si \quad A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad Adj\ a_{23}=(-1)^{2+3} . \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{14} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix}$$

DEFINICIÓN DE UN DETERMINANTE POR RECURRENCIA.

Sea A una matriz cuadrada de orden n

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

el valor del determinante lo podemos desarrollar por recurrencia mediante cualquier fila i o cualquier columna j ($i , j \in \{1, 2, , 3,... , n\}$), de la matriz A, mediante

$$det\ A=a_{i1} . Adj\ a_{i1}+ a_{i2} . Adj\ a_{i2}+ ...+ a_{in} . Adj\ a_{in}$$

o

$$det\ A=a_{1j} . Adj\ a_{1j}+ a_{2j} . Adj\ a_{2j}+ ...+ a_{nj} . Adj\ a_{nj}$$

 # Ejemplo

$$A=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2 & 2\\ -3 & 1 & 3 & 3\\ 4 & 0 & -4 & 4\end{vmatrix}=2.\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -3 & 3 & 3\\ 4 & -4 & 4\end{vmatrix}-1.\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 2\\ 4 & -4 & 4\end{vmatrix}=2.48-1.24=72$$

que lo hemos desarrollado por la segunda columna.

4. Propiedades de los determinantes

PROPIEDADES Y OPERACIONES.

1.- Si todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada se descomponerse en dos sumandos, entonces, su determinante es igual a la suma de dos determinantes que tienen en esa fila o columna el primero y el segundo sumando, respectivamente y en las demás los mismos elementos que el determinante inicial. Es decir, para el caso de n = 3, se cumplirá

$$\begin{vmatrix}a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}b_{11} & b_{12} & b_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

 # Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}9 & 8 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5 & 5 & 5\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}4 & 3 & 2\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

2.- Si se multiplican todos los elementos de una fila o columna de una matriz cuadrada por un número, el determinante queda multiplicado por dicho número. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}k\,.\,a_{11} & k\,.\,a_{12} & k\,.\,a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k.\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

 # Ejemplo:

$$\begin{vmatrix}9 & 8 & 7\\ 3 & 2 & 3\\ 12 & 5 & 6\end{vmatrix}=3.\begin{vmatrix}3 & 8 & 7\\ 1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{vmatrix}$$

3.- Si A y B son dos matrices cuadradas, entonces $det(A.B)=det\,A\,.\,det\,B$

 # Ejemplo:

$$det\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}.\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=(-1).(-1)=1$$

PROPIEDADES Y DEPENDENCIA.

4.- Si cambiamos entre sí dos filas o columnas de una matriz cuadrada, su determinante cambia de signo respecto al inicial. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}$$

 # Ejemplo: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 2 & 1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\end{vmatrix}$

5.- Si una matriz cuadrada tiene una fila o columna con todos los elementos nulos, su determinación es cero. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & 0\\ a_{21} & a_{22} & 0\\ a_{31} & a_{32} & 0\end{vmatrix}=0$$

 # Ejemplo: $\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}=0$

6.- Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas iguales, su determinante es cero. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{vmatrix}=0$$

 # Ejemplo: $\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 2\end{vmatrix}=0$

7.- Si una matriz cuadrada tiene dos filas o dos columnas proporcionales, su determinante es cero. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix}a_{11} & k\,.\,a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & k\,.\,a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & k\,.\,a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\,.\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=0$$

 # Ejemplo: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0$

7.- Si una fila o columna de una matriz cuadrada es combinación lineal de las restantes filas o columnas, su determinante es cero. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & k\,.\,a_{11}+h\,.a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & k\,.\,a_{21}+h\,.\,a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & k\,.\,a_{31}+h\,.a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = k\,.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + h\,.\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$$

 # Ejemplo: $\begin{vmatrix} 5 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

TRANSFORMACIONES PARA SIMPLIFICAR EL CÁLCULO DE DETERMINANTES.

9.- Si una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela no varía. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11}+a_{31} & a_{12}+a_{32} & a_{13}+a_{33} \end{vmatrix}$$

10.- Si una fila o columna de una matriz cuadrada se le suma otra paralela proporcional, no varía. Es decir para el caso de n = 3, se cumple

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\,.\,a_{11} & k\,.\,a_{12} & k\,.\,a_{13} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ k\,.\,a_{11}+a_{31} & k\,.\,a_{12}+a_{32} & k\,.\,a_{13}+a_{33} \end{vmatrix}$$

 # Ejemplo: Para calcular el determinante $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$ *, restando la primera fila a las otras*

dos, resulta $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = 0$.

5. Cálculo de la matriz inversa

MATRIZ ADJUNTA.

Dada una matriz cuadrada A, se llama matriz adjunta de A y se representa por **Adj A**, a la matriz que se obtiene al sustituir cada elemento a_{ij} por su Adjunto $Adj\ a_{ij}$.

 # Ejemplo

$$Si \quad A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad Adj\ A=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -7 \\ 0 & -2 & -2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

MATRIZ INVERSA.

Una matriz cuadrada A es **inversible** si y solo si $det(A)\neq 0$. Si A no es inversible, decimos que es **singular.** Además, si una matriz cuadrada A tiene inversa A^{-1} , se cumplirá

$$A\ .\ A^{-1}=I \Rightarrow |A.\ A^{-1}|=|I| \Rightarrow |A|.|A^{-1}|=1 \Rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}\neq 0$$

Y será:

$$A^{-1}=\left(\frac{1}{det\ A}\right).(Adj\ A)^t$$

 # Ejemplo.- Si $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\left(\frac{1}{det\ A}\right).(Adj\ A)^t=\left(\frac{1}{\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}}\right)\cdot\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix} \frac{4}{10} & -\frac{2}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

6. Rango de la matriz

Denominamos **menores de orden p de una matriz A** a los determinantes de las submatrices cuadradas de orden p.

 # Ejemplo,- Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *, los menores de orden 2 serán*

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2\ ;\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=2\ ;\ \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=2$$

El rango de una matriz A, rango(A), es el orden del mayor menor no nulo de dicha matriz

 # Ejemplo.-

Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 \\ -3 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ *, su rango no puede ser tres, ya que*

$$\left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right|=0\ ;\ \left|\begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -3 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right|=0\ ;\ \left|\begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right|=0\ ;\ \left|\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\right|=0$$

Sin embargo, dado de que existe algún menor de orden dos, por ejemplo

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

tenemos que rango(A) = 2