Teoría – Tema 5

Teoría - 14 - Bases ortogonales y ortonormales

Base de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial es cualquier conjunto de vectores que sea sistema generador y linealmente independiente. Es decir, una base permite representar cualquier vector (sistema generador) y los vectores que forman la base no son proporcionales unos de otros (linealmente independientes).

Una base es el sistema generador con el menor número de vectores posibles.

¿Cuántas bases posee un espacio vectorial? Infinitas.

¿Existen "bases especiales" que sean muy utilizadas y muy relevantes al trabajar con vectores sobre sistemas cartesianos? Sí, son las bases que vamos a llamar ortogonales y ortonormales.

Si los vectores que forman una base son **perpendiculares dos a dos**, decimos que nuestra base es **ortogonal**.

Si **además de ser perpendiculares dos a dos**, todos los vectores de la base son **unitarios**, hablaremos de base **ortonormal**.

Por definición, **toda base ortonormal es ortogonal**, pero no al revés.

¿Cuántas bases ortogonales tiene un espacio vectorial? Infinitas.

¿Cuántas bases ortonormales tiene un espacio vectorial? Infinitas.

¿Existe alguna "base ortonormal" de especial interés? Sí, aquella base formada por vectores unitarios con origen el sistema de referencia y dirección coincidente con los ejes cartesianos. Es la que se conoce como **base canónica** del espacio vectorial.

Base canónica

En $V^2 \rightarrow \hat{i}=(1,0) \;,\; \hat{j}=(0,1)$

En $V^3 \rightarrow \hat{i}=(1,0,0) \;,\; \hat{j}=(0,1,0) \;,\; \hat{k}=(0,0,1)$

…

En $V^n \rightarrow \hat{i}=(1,0,0,\ldots,0) \;,\; \hat{j}=(0,1,0,\ldots,0) \;,\ldots,\; \hat{n}=(0,0,0,\ldots,1)$

¡¡MUY IMPOTANTE!!

Resumiendo todo lo relacionado con vectores y rango:

- El rango coincide con el número de vectores linealmente independientes. En consecuencia, diremos que k-vectores son linealmente independientes si su rango vale k.
- k-vectores de n-dimensiones forman sistema generador si su rango es igual a la dimensión n.
- k-vectores de n-dimensiones forman una base si k=n y si su rango es igual a la dimensión n.
- El rango de k-vectores de n-dimensiones, como máximo, coincide con el menor valor entre k y n.