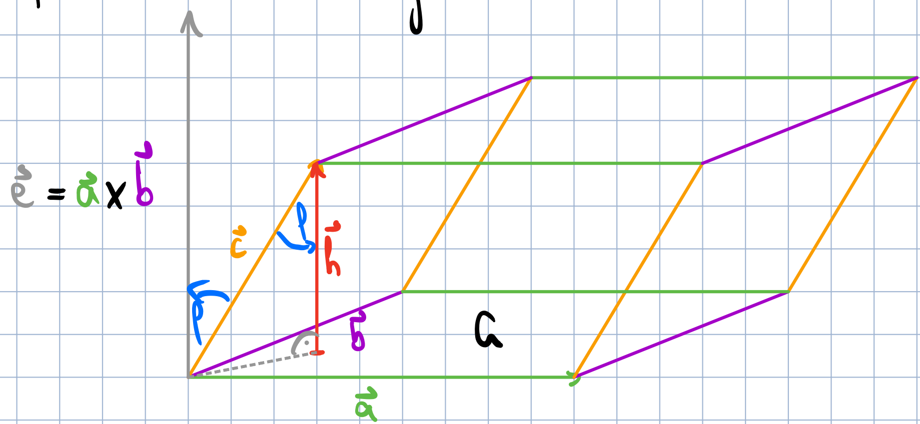
8. Spatprodukt

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$, welche paarweise nicht dieselbe Richtung besitzen. Dann spannen die Vektoren einen Spat (≙ schiefes Prisma mit Parallelogramm als Grundfläche) auf, für dessen Volumen V gilt: $V = G \cdot |\vec{h}|$



Nach IV. 7 gilt, dass

$$G = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{e}|$$

Zudem gilt

$$|\vec{h}| = |\vec{c}| \cdot \cos(\varphi)$$

Da die Winkel zwischen $\vec{c}$ und $\vec{h}$, sowie zwischen $\vec{e}$ und $\vec{c}$ gleich sind (Wechselwinkel!), folgt insgesamt:

$$V = G \cdot |\vec{h}| = |\vec{e}| \cdot |\vec{c}| \cdot \cos(\varphi) \overset{\text{DEF}}{=} |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

Die Betragsstriche werden benötigt, da sonst auch ein negatives Volumen möglich wäre!

MERKE

Das Volumen V eines Spats der Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ beträgt

$$V_S = |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$

Da man den Spat in sechs gleiche Pyramiden mit dreieckiger Grundfläche unterteilen kann, folgt

$$V_{P\Delta} = \frac{1}{6} \cdot |(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}|$$