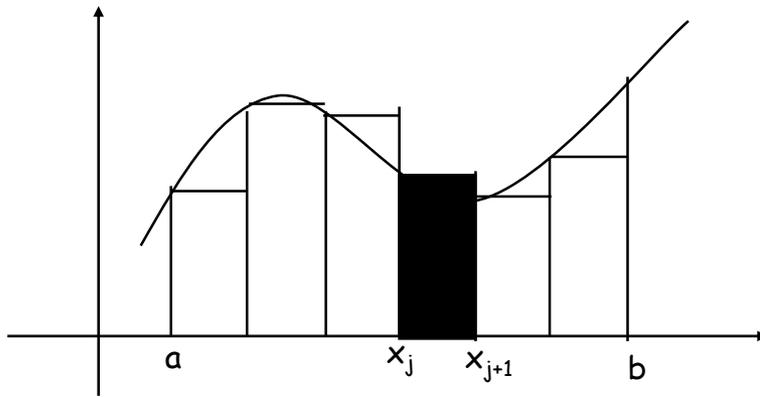


Repaso de la situación en una variable

Sea f , función continua y no negativa sobre $[a,b]$ que se divide en n subintervalos de igual longitud Δx . Si x_j es el extremo izquierdo del j -ésimo subintervalo entonces, la integral de f en $[a,b]$ se define:



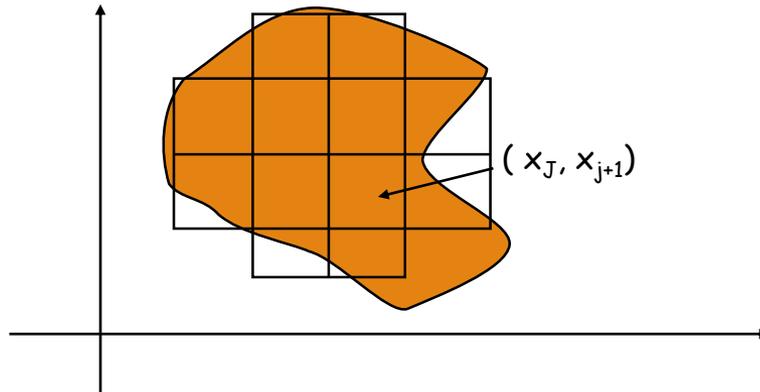
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j) \Delta x = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Gráficamente representa el área bajo la gráfica de f en $[a,b]$

La integral doble

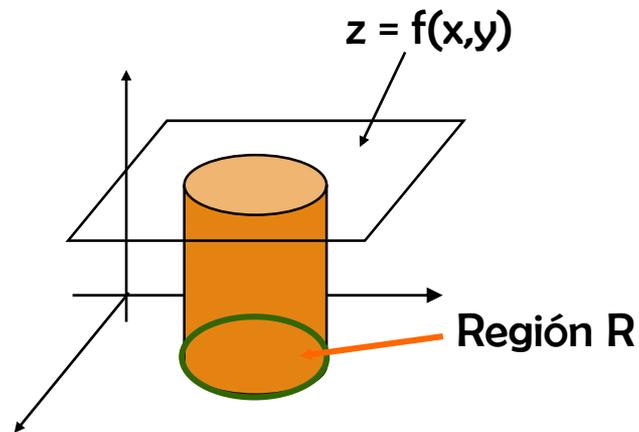
Sea f , continua en una región R del plano xy . Usando líneas paralelas a los ejes para aproximar R por medio de n rectángulos de área ΔA . Sea (x_j, y_j) un pto del j -ésimo rectángulo, entonces la integral doble de f sobre R es:

$$\iint_R f(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n f(x_j, y_j) \Delta A$$



Interpretación gráfica

La integral doble de una función no negativa en dos variables se interpreta como el volumen bajo la superficie $z = f(x,y)$ y sobre la región R del plano xy .



Cálculo de integrales dobles

La integral doble de f sobre la región R , está dada por el valor común de las dos integrales iteradas.

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

Donde a , b , c y d son los límites de integración de la región R .

Para resolver la integral doble, se mantiene fija una variable y se integra con respecto a la otra variable.

Propiedades

$$a) \iint_R K \cdot f(x, y) dA = K \iint_R f(x, y) dA$$

$$b) \iint_R f(x, y) \pm g(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

$$c) \text{ Si } f(x, y) > 0, \forall (x, y) \in R, \iint_R f(x, y) dA > 0$$

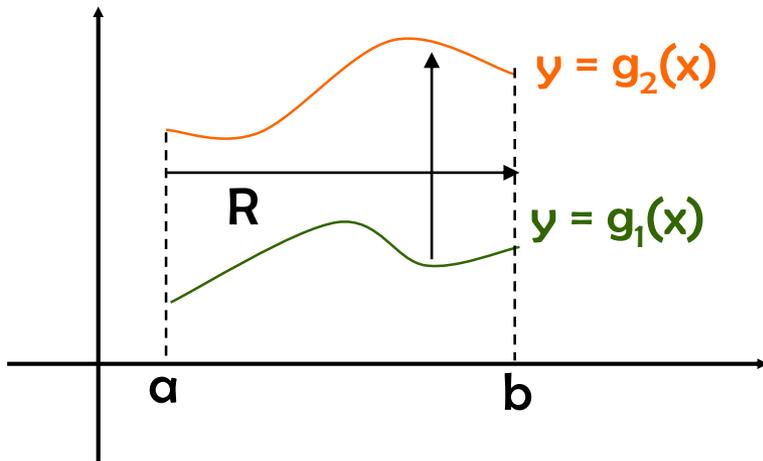
d) Si $R = R_1 \cup R_2$, donde R_1 y R_2 no se sobreponen

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

Límites de integración

Secciones transversales verticales: La región R está limitada por las gráficas de g_1 y g_2 en el intervalo $[a, b]$. Si R es descrita por

$$R: a \leq x \leq b, \quad g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$$

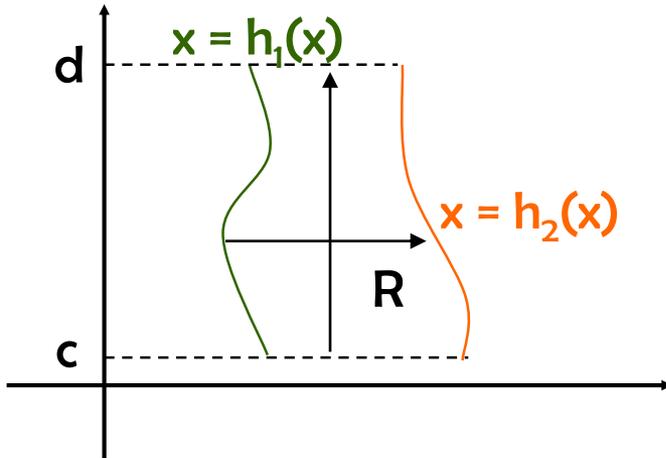


$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

Límites de integración

Secciones transversales horizontales: La región R está limitada por las gráficas de h_1 y h_2 en el intervalo $[c, d]$. Si R es descrita por

$$R: c \leq y \leq d, \quad h_1(y) \leq x \leq h_2(y)$$



$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$