Історична довідка

У 1803 році італійський математик Джанфранческо Мальфатті (1731-1807) в журналі «Memorie di matematica e di fisica della Societa Italiana delle scienze», т. X, p. 1, Модена, 1803, стр. 235-244) опублікував задачу, яка зводилась до розміщення в даному трикутнику трьох кругів максимальної площі. Він вважав, що необхідний максимум досягається в конструкції, наведеній на зображенні.

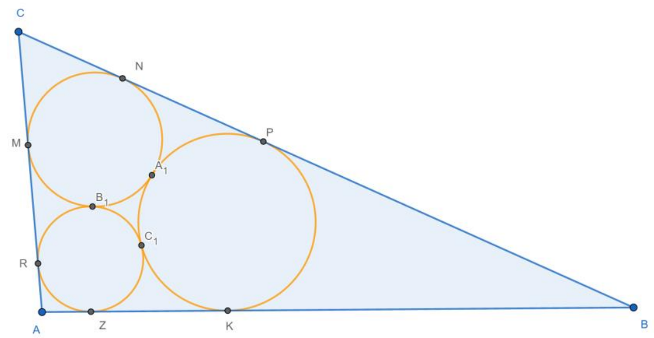



Рис.1.1

Мальфатті отримав розв’язки, використовуючи методи аналітичної геометрії. Зокрема, він розрахував координати центрів кіл, отриманих в результаті їх побудови, проте не навів способу виведення формул, зазначивши лише, що розв’язання є довгим і непростим [3, 4, 5,17].

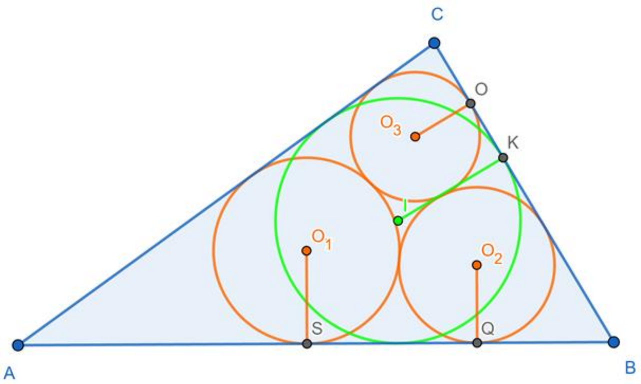
Робота Мальфатті певний час була непомічена. Слід зауважити, популярність Джанфранческо Мальфатті була незначною. Для сучасників він був відомий через багаточисельні невдалі спроби знайти загальну формулу для розв’язування загального алгебраїчного рівняння 5-го степеня, а також нищівну (і несправедливу) критику робіт італійського лікаря і чудового математика-любителя Паоло Руффіні, який дав перше, хоча в деяких деталях і неповне, доведення того, що такої формули зовсім не існує: Професор університету Феррари не зумів оцінити глибину і оригінальність досліджень свого співвітчизника [4].

Інтерес до задачі, завдяки якій Мальфатті ввійшов в історію математики, виник після того як відомий французький математик Жозеф Жергонн (1771-1859) у 1810 році у своєму журналі запропонував для читачів задачу про вписані кола. Але він лише поставив проблему про дотичні кола, а не задачу про знаходження максимальної площі кругів. Поява задачі у відомому журналі викликала значний інтерес у багатьох геометрів. Кола, які потрібно було побудувати, стали називатись колами Мальфатті.

Цікавий історичний нарис про пошуки розв’язку задачі навів російський математик Микола Агрономов у науково-популярному журналі "Ве́стник о́пытной фи́зики и элемента́рной матема́тики" у 1907 році [13]. У роботі Агромонова мова йде про наукову дискусію щодо задачі Мальфатті, якій сприяв журнал "Annales de Gergonne", де було опубліковано декілька розв’язків задачі. Найбільш широко узагальнив задачу знаменитий швейцарський математик Якоб Штейнер (1796-1863). Саме він дав свою відому побудову трьох вписаних кіл в трикутник. Але побудова не містила обґрунтувань, що породило чергові наукові дослідження. Появились роботи Келі, Клебша, Шретера, Адамса та інших математиків [1,2,3,4,5,13,17].

Для справедливості слід зазначити, що задачу про вписані кола у трикутник розглядали задовго до Мальфатті. Зокрема, швейцарський математик Якоб Бернуллі (1654-1705) в елементарній геометрії розв'язав задачу для випадку рівнобедреного трикутника. Японський математик XVIII століття Адзіма Наонобу (1732-1798) успішно вів пошук співвідношень між елементами трикутника, в який вписані кола. Через рік після смерті Адзіми один з його студентів Кусака Макото підготував до публікації (але так і не опублікував) колекцію робіт Адзіми, що описує залежність між радіусом кола, вписаного в трикутник, та радіусами кіл, які згодом стали називати колами Мальфатті [3,5,13].

Отримана формула вражає своїм естетичним виглядом:




$$r = \frac{2\sqrt{r_1 r_2 r_3}}{\sqrt{r_1} + \sqrt{r_2} + \sqrt{r_3} - \sqrt{r_1 + r_2 + r_3}}$$

Рис.1.2

У формулі r – радіус кола вписаного в трикутник, а $r_1$, $r_2$ і $r_3$ – радіуси кіл Мальфатті.

На сьогодні відомо, що подібна задача розглядалася також у манускрипті 1384 року, написаному Монтепунчіано. Манускрипт знаходиться в Муніципальній бібліотеці в італійській Сієні [17].

## Побудова кіл Мальфатті способом Штейнера

У 1826 році Якоб Штейнер опублікував також без доведення побудову кіл Мальфатті, зображену на рис. 1.3.

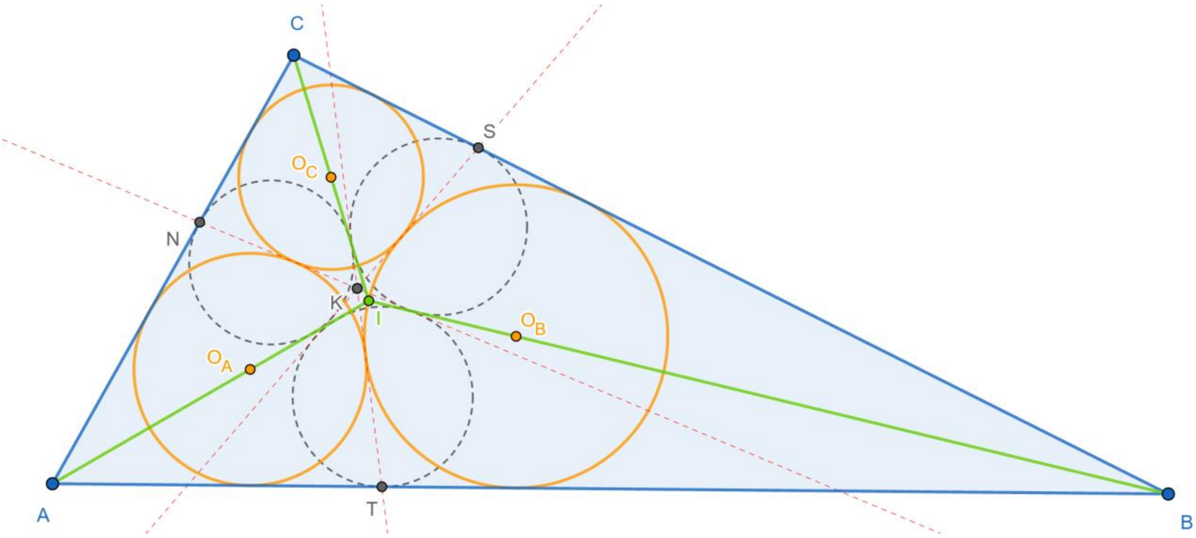



Рис.1.3

Центр кола, що дотикається двох сторін трикутника, лежить на одній з бісектрис трикутника (зелені відрізки на рисунку). Ці бісектриси ділять трикутник на три менших трикутники. Побудова кіл Мальфатті починається з побудови допоміжних трьох кіл (на малюнку зображені пунктиром), вписаних в ці три трикутники. Кожна пара допоміжних кіл має дві внутрішні дотичні. Одна з цих дотичних є бісектрисою, а друга показана на малюнку червоним пунктиром.

Нехай точки T, S і N – точки перетину дотичних із сторонами трикутника, а точка К є точкою перетину внутрішніх дотичних до допоміжних кіл.

Тоді три кола Мальфатті - це вписані кола трьох чотирикутників ATKN, BTKS і CNKS [1,2,5,13,17].

Повне доведення методу Штейнера було вперше опубліковано Шретером в 1874 році. Його можна знайти в підручнику Адамара "Елементарна геометрія". Але це доведення досить складне і не елементарне. Зокрема, воно використовує інверсію. У книзі Шклярського, Ченцова та Яглома "Вибрані завдання і теореми математики" наводиться елементарне, але теж досить складне доведення методу Штейнера [5].

**Властивості кіл Мальфатті**

**1. Перша точка Адзіми-Мальфатті**

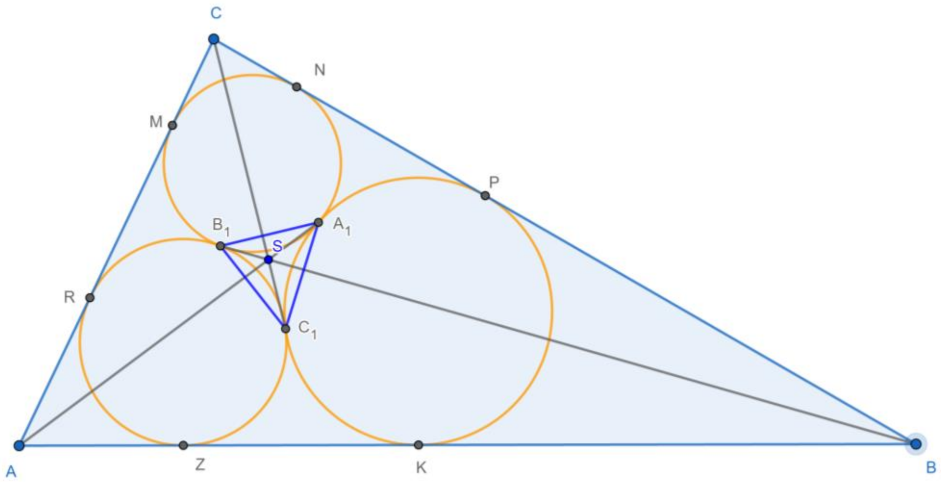



Рис.1.4

Нехай *кA*, *кB*, *кC* є колами Мальфатті, які вписані в кути A, B, C відповідно. Позначимо через $A_1$ – точку дотику кіл *кB* і *кC*. $B_1$– точку дотику кіл *кA* і *кC*. $C_1$– точку дотику кіл *кA* и кB.

Трикутник $A_1B_1C_1$ називають контактним трикутником Мальфатті, а точку перетину відрізків $AA_1$, $BB_1$ і $CC_1$ – першою точкою Адзіми-Мальфатті [17].

**2. Друга точка Адзіми-Мальфатті**

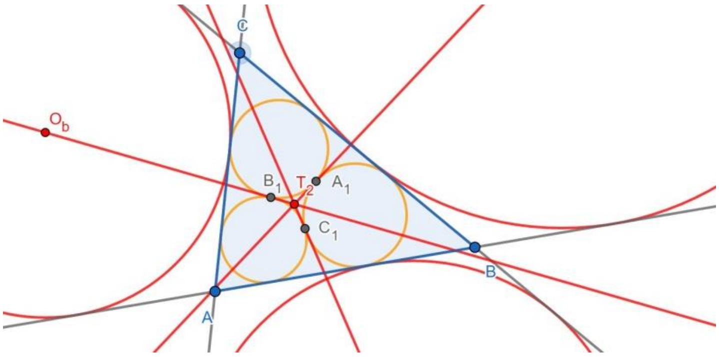



Рис.1.5

Друга точка Адзіми - Мальфатті – точка перетину трьох прямих, що з'єднують точки дотику кіл Мальфатті з центрами зовнішньовписанних кіл трикутника. [17]

Прямі $O_aA_1$, $O_bB_1$ та $O_cC_1$ перетинаються в одній точці $T_2$.

## Помилковість твердження Мальфатті

Автор задачі досліджував побудову кругів з помилковим переконанням, що в сумі буде отримано максимально можливу площу трьох непересічних кругів всередині трикутника. Його гіпотезу тривалий час не ставив під сумнів жоден з математиків. Можливо це пов’язане було з тим, що дискусії велись навколо способів побудови, залежності радіусів кіл та знаходження їх центрів у довільних трикутниках.

Лише у 1930 році виявлено, що в деяких трикутниках більша площа може бути отримана за допомогою алгоритму, за яким спочатку вписуємо в трикутник круг максимального радіусу, потім вписуємо другий круг в один з кутів з найменшою величиною кута, а зрештою вписуємо третій круг в одну з п'яти областей, що залишилися [12].

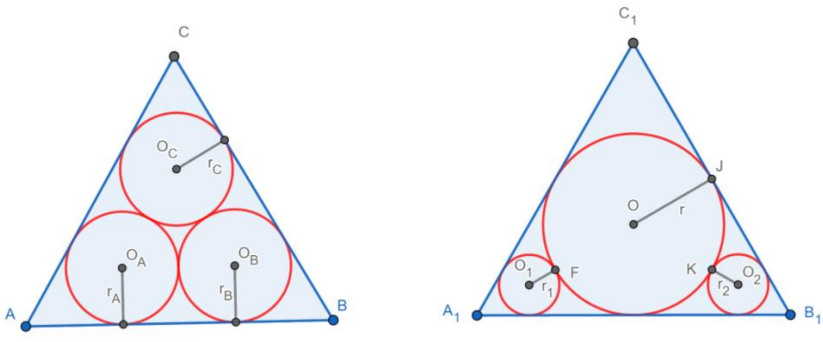



Рис.1.6

На рисунку 1.6 показано два розподіли трьох кіл у правильному трикутнику: перше з трьома колами Мальфатті і друге, описане Лобом і Річмондом, в якому вони покривають більшу поверхню, ніж в попередньому [12].

Якщо взяти правильний трикутник зі стороною 2 см, то його площа приблизно дорівнює 1,73 см$^2$. Круги Мальфатті займають площу приблизно 1,26 см$^2$ (72,83 % площі трикутника), в той час як розподільні круги Лоба і Річмонда мають площу приблизно 1,28 см$^2$ (73,99 % площі трикутника).

Різниця між площами кругів для правильного трикутника невелика, трохи більше 1%. Для рівнобедреного трикутника з дуже гострим кутом у вершині оптимальні круги (розташовані один над іншим, починаючи від основи) мають майже подвоєну площу в порівнянні з кругами Мальфатті.

Для прикладу розглянемо співвідношення площ у рівнобедреному трикутнику, у якого бічні сторони набагато більші, ніж основа. Площа, вкрита кругами Мальфатті в такому трикутнику (рис. 1.7), становить 41% від загальної площі поверхні трикутника.

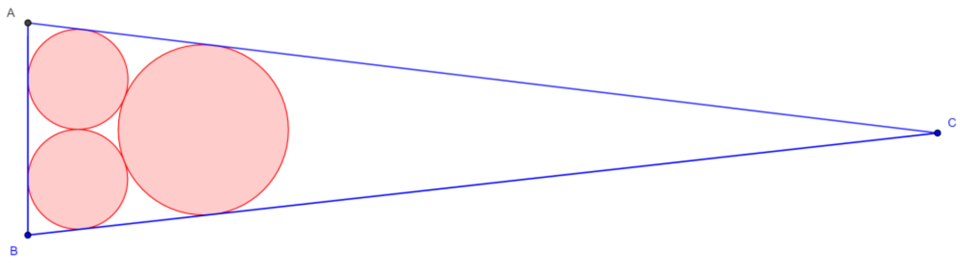



Рис. 1.7

Якщо розташувати три круги в ряд так, щоб вони дотикались до двох бічних сторін рівнобедреного трикутника (рис. 1.8), то їх площа буде набагато більшою, ніж площа, відповідна трьом кругам Мальфатті.

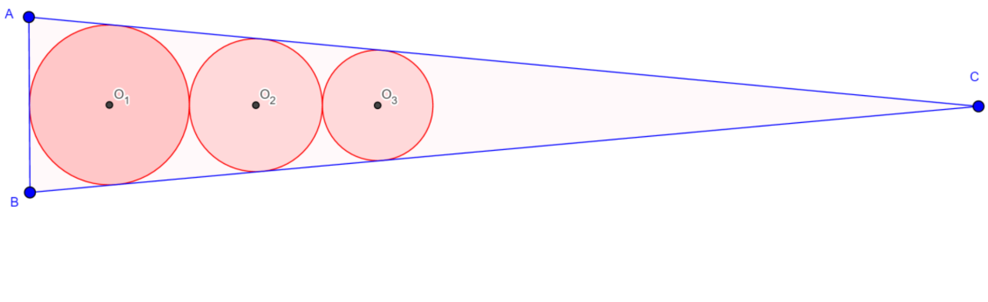



Рис. 1.8

Площа, вкрита трьома кругами, які не є кругами Мальфатті, з цим новим розташуванням в даному трикутнику становить 60% від загальної площі поверхні трикутника.

У 1967 році показано, що для будь-якого трикутника зазначена побудова дає три круги з більшою площею, ніж круги Мальфатті [14].

Початкова умова Мальфатті була повністю розібрана в 1992 році, коли В.А.Залгаллер і Г.О.Лось у своїй статті "Вирішення проблеми Мальфатті" класифікували всі способи отримання трьох кіл максимальної поверхні всередині трикутника [9].

Зокрема, вони показали, що існує 14 форм розташувань з трьох кругів, які не перекриваються у трикутнику. Ті, які показані на рис. 1.9.

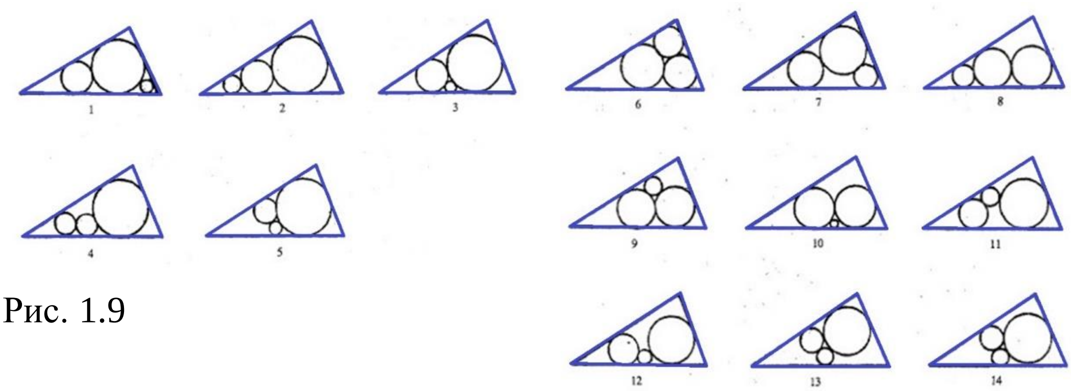



Рис. 1.9

У 1992 році класифіковані всі способи розташування максимальних за сумарною площею кругів всередині трикутника [6,7].

При використанні цієї класифікації доведено, що є алгоритм, який завжди знаходить круги, максимізує площу і пропонує формулу для визначення, яке розташування кругів оптимальне для заданого трикутника.

У 1997 році висловлена гіпотеза, що для будь-якого цілого n є алгоритм для заданого трикутника, який знаходить набір з n кругів з максимальною загальною площею [17].

У 2006 році задачею Мальфатті захопився монгольський математик професор Ренцен Енхбат. Він узагальнив цю задачу на площині: потрібно вписати m кіл в n-кутник. Згодом розглянув розширення постановки завдання Мальфатті в багатовимірних просторах. Результати робіт директора Інституту математики

Державного університету Монголії з даної проблеми опубліковані в рейтингових математичних журналах і принесли йому світову популярність. Слід зауважити, що Ренцен Енхбат вважається одним з провідних математиків в світі. Його роботи, такі, як "Оптимізація моделювання і теоретичних розрахунків", "Опукле програмування квазі" були опубліковані в журналі "Springer". Крім того, компанія "Samsung" використовує його розробки у виробництві мобільних телефонів і комп'ютерів.

Задача Мальфатті має велику кількість різноманітних досліджень і відповідно велику кількість бібліографічних посилань.

Початкова умова задачі набула нового змісту. На початку XX століття математики обґрунтували помилковість гіпотези Мальфатті. Далі вівся пошук оптимального розміщення кругів у трикутнику.

Протягом останніх десятиліть задача була узагальнена та успішно розв’язана для m кіл в n-кутнику. Розв’язки задачі використовуються при розробці сучасних технологій.