Teoría – Tema 3

Teoría - 3 - suma, resta y producto en notación binómica

Desarrollo formal del cuerpo conmutativo de los números complejos, con las operaciones internas suma y producto

Sea la pareja de valores (a,b) . Cada valor pertenece a los reales: $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$. El valor complejo $z=a+b\cdot i$ viene expresado en forma binómica.

Los números complejos son el **conjunto de los pares de valores** (a,b) **representados en el plano complejo**: $\mathbb{C}=\{(a,b)/a\in\mathbb{R}, b\in\mathbb{R}\}$. Esta notación (a,b) se denomina forma afija.

También podemos expresar $\mathbb{C}$ como un producto cartesiano: $\mathbb{C}=\{(a,b)\in\mathbb{R}\ x\ \mathbb{R}\}$.

El primer elemento del par de valores (a,b) se denomina **parte real**. Y el segundo es la **parte imaginaria**.

$$\begin{array}{c} (a,b)\in\mathbb{C} \\ a\equiv parte\ real \\ b\equiv parte\ imaginaria \end{array}$$ → **Afijo de un número complejo**.

Suele reservarse la letra z para representar números complejos: $z=(a,b)=a+b\cdot i$

El opuesto a z sería $-z=(-a,-b)=-a-b\cdot i$.

Si multiplicamos un número complejo por un número real tendremos un nuevo número complejo que resulta de multiplicar el número real por cada uno de lo valores del afijo. Por ejemplo: $7\cdot z=(7\cdot a,7\cdot b)=7\cdot a+7\cdot b\cdot i$

$z=(a,b)$ → Representación de un número complejo como **pareja de valores (afijo)**.

$z=a+b\cdot i$ → **Notación binómica** para un número complejo,

Vamos a desarrollar formalmente la suma y producto de números complejos.

Suma de complejos

$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$

$a+bi+c+di=a+c+(b+d)i$

La suma da como resultado **un nuevo número complejo cuya parte real es suma de las partes reales de los sumandos, y la parte imaginaria es suma de de las partes imaginarias de los sumandos**.

Como la suma genera un nuevo número complejo, se dice que la suma de complejos es una operación interna. Además, se definen las siguientes propiedades para la suma:

Propiedades de la suma de complejos

Conmutativa → $(a,b)+(c,d)=(c,d)+(a,b)$

Asociativa → $[(a,b)+(c,d)]+(e,f)=(a,b)+[(c,d)+(e,f)]$

Elemento neutro $(0,0)$ → $(a,b)+(0,0)=(a+0,b+0)=(a,b)$

El simétrico de la suma es el opuesto: $(-a,-b)$ → $(a,b)+(-a,-b)=(a-a,b-b)=(0,0)$

Producto de complejos

$(a,b)\cdot(c,d)=(a\cdot c-b\cdot d, a\cdot d+b\cdot c)$

$(a+bi)\cdot(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$ → como $i^2=-1$ → el producto en binómica queda:

$(a+bi)\cdot(c+di)=ac-bd+(ad+bc)i$

La "peculiar" forma del producto de complejos es consecuencia directa de la definición de la unidad imaginaria $i^2=-1$.

Al multiplicar obtenemos un nuevo complejo con parte real $ac-bd$ y parte imaginaria $ad+bc$. El producto también es una operación interna de los números complejos que cumple las siguientes propiedades:

Propiedades del producto de complejos

Conmutativa → $(a,b)\cdot(c,d)=(c,d)\cdot(a,b)$

Asociativa → $[(a,b)\cdot(c,d)]\cdot(e,f)=(a,b)\cdot[(c,d)\cdot(e,f)]$

Elemento neutro $(1,0)$ → $(a,b)\cdot(1,0)=(a\cdot 1-b\cdot 0, a\cdot 0+b\cdot 1)=(a,b)$

El simétrico del producto es el inverso: $\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ → $(a,b)\cdot\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$

Distributiva respecto de la suma → $(a,b)\cdot[(c,d)+(e,f)]=(a,b)\cdot(c,d)+(a,b)\cdot(e,f)$

La forma del elemento simétrico del producto se obtiene de realizar el inverso de $z=(a,b)$. Es decir:

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+b\cdot i}$$

¿Cómo podemos operar con el inverso? Si definimos el **conjugado de un número complejo** $z=a+bi$ como $\overline{z}=a-bi$, podemos operar en la expresión anterior multiplicando y dividiendo por el conjugado del denominador.

$$z^{-1}=\frac{1}{z}=\frac{1}{a+b\cdot i}=\frac{a-b\cdot i}{(a+b\cdot i)\cdot(a-b\cdot i)}=\frac{a-b\cdot i}{a^2-b^2\cdot i^2}=\frac{a-b\cdot i}{a^2+b^2}$$

Obteniendo un nuevo complejo de parte real $\frac{a}{a^2+b^2}$ y parte imaginaria $\frac{-b}{a^2+b^2}$, que será el inverso de z .

Los números complejos $\mathbb{C}$ junto a las dos operaciones internas suma y producto $(\mathbb{C},+,\cdot)$, tienen estructura matemática de **Cuerpo conmutativo** (al igual que los números reales $\mathbb{R}$).

Repaso de conceptos

Los números complejos que tienen su parte imaginaria nula son números reales:

$si\ b=0 \ \rightarrow \ (a,0)=a \equiv número\ real$ → Se representan en el eje real horizontal.

Los números complejos que tienen su parte real nula se denominan imaginarios puros:

$si\ a=0 \ \rightarrow \ (0,b) \equiv imaginario\ \ puro$ → Se representan en el eje vertical imaginario.

La unidad imaginara $i=\sqrt{-1}$ vamos a representarla como un número complejo imaginario puro, de tal forma que:

$$i=(0,1) \ \rightarrow \ i^2=i\cdot i=(0,1)\cdot(0,1)=(0-1,0+0)=(-1,0)=-1$$

Si multiplicamos cualquier número real por la unidad imaginaria, obtenemos un número complejo imaginario puro:

$$\begin{array}{c} x\in\mathbb{R} \\ (x,0)\cdot i=x\cdot i \\ (x,0)\cdot(0,1)=(0,x) \end{array} \ \rightarrow \ (0,x)=x\cdot i$$ → Complejo imaginario puro.

Un número complejo arbitrario podemos desarrollarlo en su forma binómica:

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=a+b\cdot i$$

Es decir, el afijo $z=(a,b)$ puede expresarse como **suma de una parte real y una parte imaginaria pura** (recordando multiplicar la parte imaginaria pura por *i* en la forma binómica).