Monotonía y curvatura.

Monotonía: crecimiento y decrecimiento en un intervalo.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **creciente** si para todo y $x \in [a, b]$ todo $h>0$ tal que $x+h \in [a, b]$ es $f(x)<f(x+h)$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **constante** si para todo $x \in [a, b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h \in [a, b]$ es $f(x)=f(x+h)$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **decreciente** si para todo $x \in [a, b]$ y todo $h>0$ tal que $x+h \in [a, b]$ es $f(x)>f(x+h)$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **monótona** si $f(x)$ es creciente en $[a, b]$ o $f(x)$ es decreciente en $[a, b]$.

Tasa de variación y monotonía

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **creciente** si para todo y $x \in [a, b]$ todo $h>0$ tal que $x+h \in [a, b]$ es

$$TVM_{(x,h)} f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}>0 \ .$$

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **constante** si para todo y todo $x \in [a, b]$ $h>0$ tal que $x+h \in [a, b]$ es

$$TVM_{(x,h)} f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=0$$

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **decreciente** si para todo y todo $x \in [a, b]$ $h>0$ tal que $x+h \in [a, b]$ es

$$TVM_{(x,h)} f(x)=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}<0$$

Derivada y monotonía.

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **creciente** si para todo es $x \in [a, b]$ $f'(x)>0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **constante** si para todo es $x \in [a, b]$ $f'(x)=0$
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **decreciente** si para todo es $x \in [a, b]$ $f'(x)<0$

 # Ejemplo.- Como la función

$$f(x)=x^4-2x^2$$

tiene por derivada

$$f'(x)=4.x.(x-1).(x+1)$$

Se cumplirá

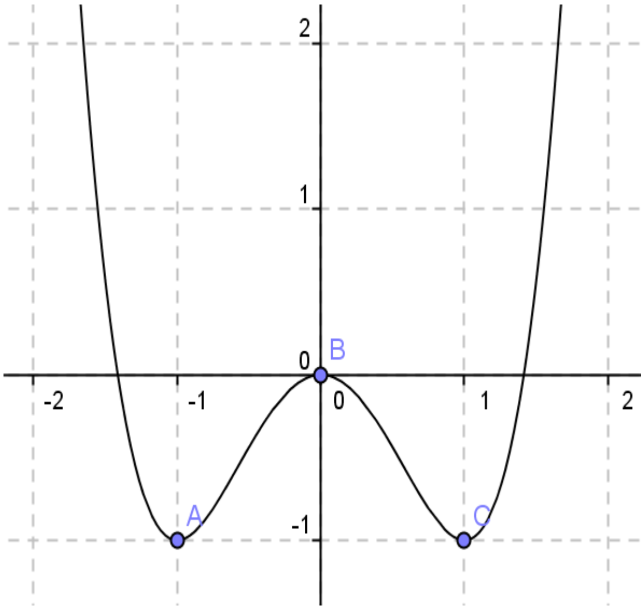
$$f'(x)<0 \ si \ x\in \ (-\infty,0)\cup(0,1)$$

$$f'(x)>0 \ si \ x\in \ (-1,0)\cup(1,+\infty)$$

Luego, se cumplirá

$f(x)$ es decreciente $si \ x\in \ (-\infty,0)\cup(0,1)$

$f'(x)$ es creciente $si \ x\in \ (-1,0)\cup(1,+\infty)$



Curvatura: concavidad y convexidad.

Derivada y curvatura

Primera derivadas y curvatura

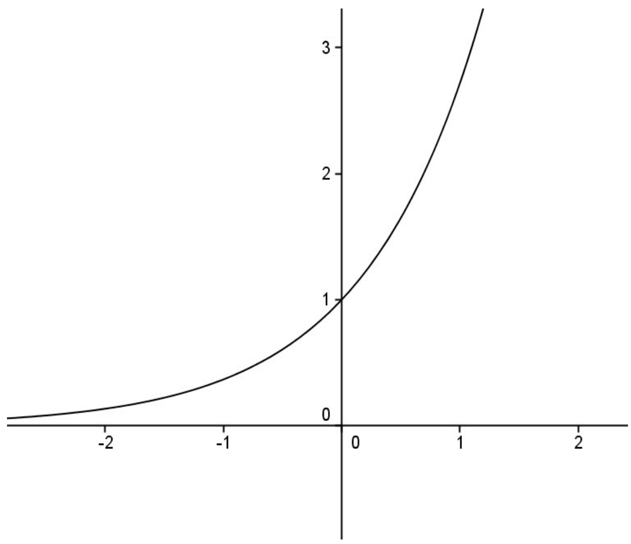
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **lineal** si para todo $x\in[a,b]$ $f'(x)$ es **constante**.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **convexa** si para todo $x\in[a,b]$ $f'(x)$ es **creciente**.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a,b]$ es **cóncava** si para todo $x\in[a,b]$ $f'(x)$ es **decreciente.**

<u>Segunda derivada y curvatura</u>

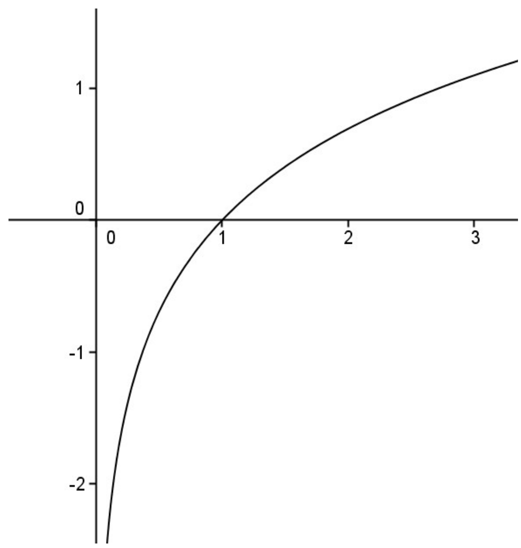
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **lineal** si para todo $x \in [a, b]$ $f''(x)=0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **convexa** si para todo $x \in [a, b]$ $f''(x)>0$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ es **cóncava** si para todo $x \in [a, b]$ $f''(x)<0$ **.**

 # Ejemplo.- La función $f(x)=e^x$ *es convexa en todo* $\mathbb{R}$ *, ya que* $f'(x)=e^x$ *que es una función creciente en* $\mathbb{R}$ *o bien utilizando la segunda derivada* $f''(x)=e^x>0$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}$. *Mientras que la función* $f(x)=\ln x$ *es cóncava en todo* $\mathbb{R}^+$ *, ya que* $f'(x)=\frac{1}{x}$ *que es una función decreciente en* $\mathbb{R}^+$ *o bien utilizando la segunda derivada* $f''(x)-\frac{1}{x^2}<0$ *para cualquier* $x \in \mathbb{R}^+$

$f(x)=e^x$



$f(x)=\ln(x)$



<u>Puntos de Inflexión</u>

Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$ con $c \in [a, b]$ si la función $f(x)$ cambia de curvatura en dicho punto.

Además, si una función $f(x)$ tiene un punto de inflexión en $(c, f(c))$ su segunda deriva se anula, es decir

$$(c, f(c)) \text{ es punto de inflexión } \Rightarrow f''(c)=0$$

El recíproco no es cierto, es decir puedes ser $f''(c) = 0$ y no ser $(c, f(c))$ un punto de inflexión

 # Ejemplo.- Para hallar los puntos de inflexión de la función

$$f(x)=x^4-6x^2 ,$$

hallamos la segunda derivada

$$f''(x)=12.(x^2-1) ,$$

que se hace cero para $x=-1$ *y* $x=1$.

Y como

$f''(x)>0$ *para* $x<-1 \Rightarrow f(x)$ *es convexa en* $(-\infty,-1)$

$f''(x)<0$ *para* $-1<x<1 \Rightarrow f(x)$ *es cóncava en* $(-1,1)$

$f''(x)>0$ *para* $x>1 \Rightarrow f(x)$ *es convexa en* $(1,+\infty)$

Los puntos

$(-1, f(-1))$ *y* $(1, f(1))$

son puntos de inflexión de f

<u>Puntos extremos: máximos y mínimos.</u>

- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ y $c \in (a, b)$, decimos que el punto $P(c, f(c))$ es un **máximo** de $f(x)$, si para todo $x \in [a, b]$ con $x \neq c$, existe un entorno de c, $E(c, h)$ tal que $f(x)<f(c)$.
- Una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ y $c \in (a, b)$, decimos que el punto $P(c, f(c))$ un **mínimo** de $f(x)$, si para todo $x \in [a, b]$ con $x \neq c$, existe un entorno de c, $E(c, h)$ tal que $f(x)>f(c)$.

Además, si una función $f(x)$ definida y continua en un intervalo $[a, b]$ tiene puntos extremos (*máximos o mínimos*), entonces su derivada se anula en ellos. Es decir

Si $P(c, f(c))$ es punto extremo de $f(x)$ $\Rightarrow$ $f'(c)=0$.

- *El teorema reciproco no es cierto, ya que por ejemplo* $f(x)=x^3$ *, cumple* $f'(0)=3\,.\,0^2=0$. *Sin embargo, el el punto* $P(0, f(0))=P(0,0)$. *La función es creciente, y por tanto no tiene ningún máximo, ni ningún mínimo. Este punto es un punto de inflexión, la función pasa en este punto de cóncava a convexa.*

Para estudiar los máximos o los mínimos podemos utilizar la primera derivada que nos aporta información del crecimiento o decrecimiento de la función o la segunda derivada que nos aporta información de la concavidad o convexidad.

Es decir si $f(x)$ es una función definida y continua en un intervalo $[a, b]$ y $c \in (a, b)$

Si $f'(c)=0$ y $E(c,h)$ es un entorno de c

- Si $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c)$ y $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c,c+h)$, $(c,f(c))$ es un **máximo** de la función $f(x)$.
- Si $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c)$ y $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c,c+h)$, $(c,f(c))$ es un **mínimo** de la función $f(x)$ **.**
- Si $f'(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ o $f'(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$, $(c,f(c))$ es un punto de **inflexión** de la función $f(x)$.
- Si $f''(x)>0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ la función $f(x)$ es convexa en un entono de $P(c,f(c))$, luego $(c,f(c))$ es un punto de **mínimo** de la función $f(x)$.
- Si $f''(x)<0$ para cualquier $x\in(c-h,c+h)-\{c\}$ la función $f(x)$ es cóncava en un entono de $P(c,f(c))$, luego $(c,f(c))$ es un punto de **máximo** de la función $f(x)$.

 # Ejemplo.- ¿De qué tipo son los posibles puntos extremos de $f(x)=x^4-2x^2$ *?*

Como la derivada primera es

$$f'(x)=4x^3-4x$$

Los posibles puntos críticos son

$$x=0, x=-1, x=1$$

Como la derivada segunda es

$$f''(x)=12x^2-4$$

Para $x=-1, f''(x)=8 \Rightarrow$ es convexa en $x=-1 \Rightarrow P(-1,-1)$ es un punto mínimo .

Para $x=0, f''(x)=-4 \Rightarrow$ es cóncava en $x=0 \Rightarrow P(0,)$ es un punto máximo .

Para $x=1, f''(x)=8 \Rightarrow$ es convexa en $x=1 \Rightarrow P(1,-1)$ es un punto mínimo .