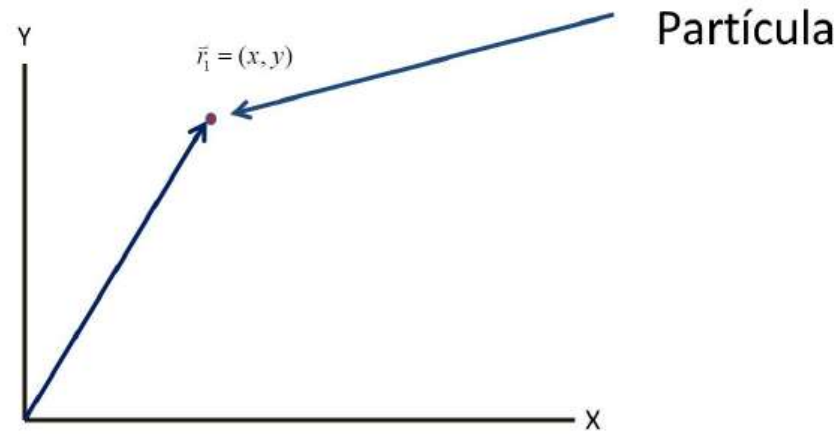
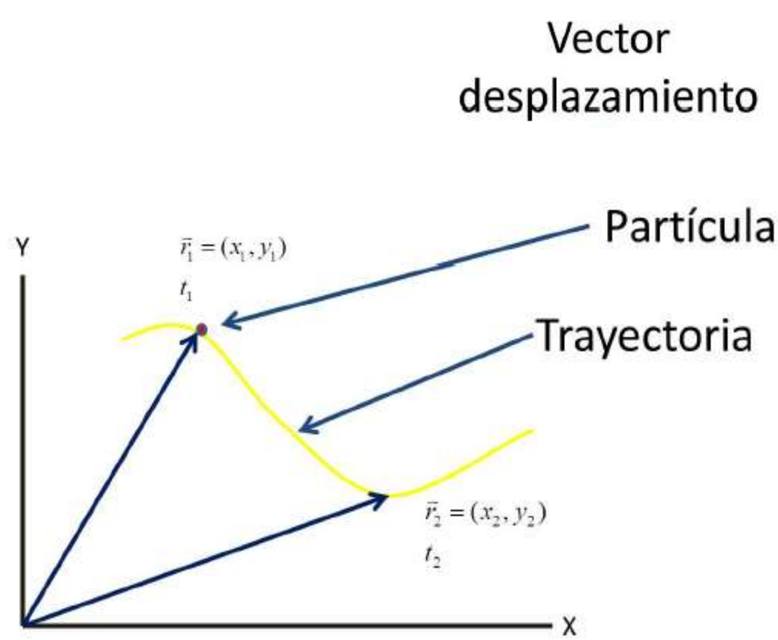
1.1 DESPLAZAMIENTO, VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

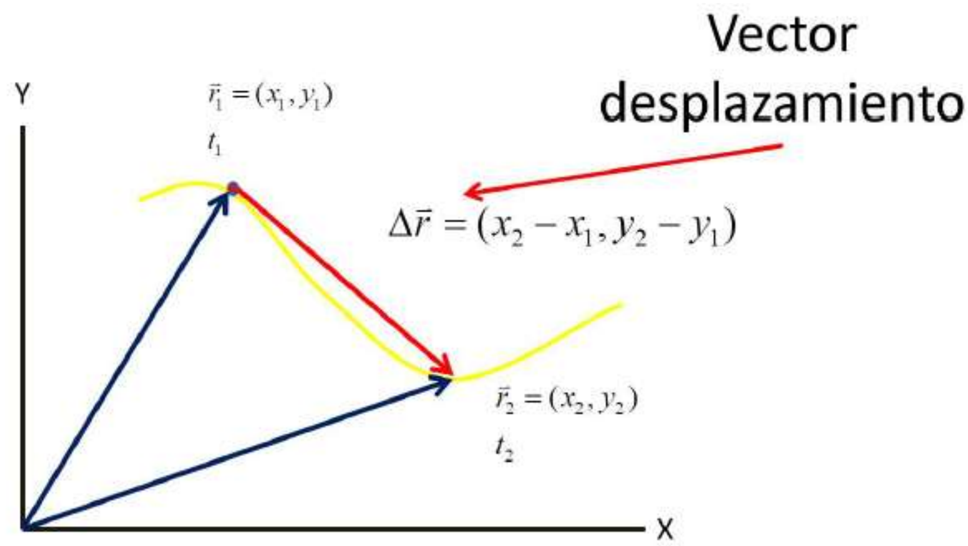
Vector Posición



El vector posición r_1 representa la ubicación en el espacio de una partícula en determinado momento. Al tratarse de un vector en el plano, éste tiene componentes x e y. Se mide en unidades de distancia.

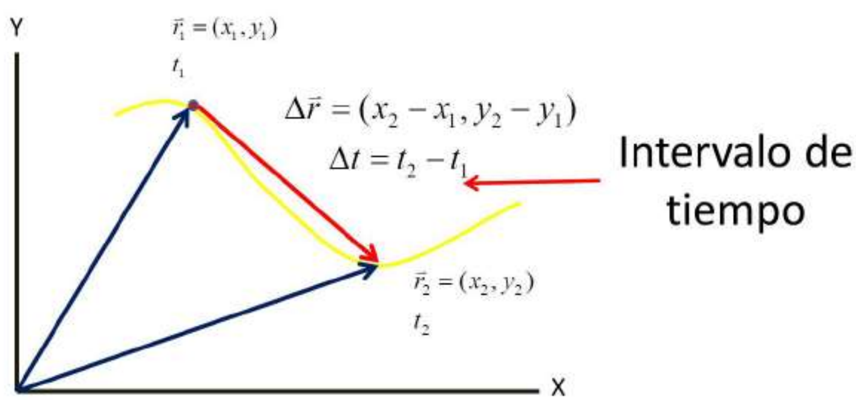


La trayectoria es el camino que describe una partícula cuando se mueve de un punto a otro. La partícula se encuentra en la posición r_1 al tiempo t_1 y a un tiempo t_2 la partícula se encuentra en la posición dada por el vector r_2.



El vector que resulta de la resta del vector r_2 al vector r_1 es justamente el vector desplazamiento, un cambio en el vector posición.

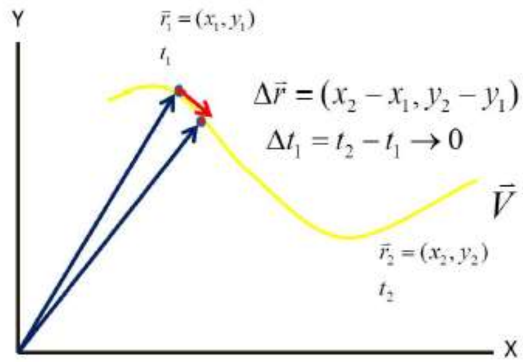
Velocidad Promedio



Como r_1 se encuentra en un tiempo t_1 y r_2 en un tiempo t_2, el desplazamiento ocurre en cierto intervalo de tiempo t_2-t_1. El cociente del vector desplazamiento entre el intervalo de tiempo da como resultado la **velocidad promedio**, que también es un vector y se mide en unidades de distancia sobre tiempo.

$$\vec{V}_{pro}=\frac{\Delta\vec{r}_1}{\Delta t}=\frac{(x_2-x_1,y_2-y_1)}{t_2-t_1} \qquad (1.1)$$

Velocidad Instantánea o Tangencial



Velocidad instantánea

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \qquad (1.2)$$

La velocidad promedio no nos dice nada acerca de la trayectoria. Para saber como es la trayectoria tenemos que medir más detenidamente el cambio de posición y eso ocurre cuando tomamos el límite cuando $t_1 = t_2$, lo cual es la derivada de la posición con respecto al tiempo y es ahí cuando encontramos la **velocidad instantánea o tangencial**, porque ésta se convierte en una tangente en la trayectoria.

Vector Aceleración

$$\bar{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \qquad (1.3)$$

La aceleración es el cambio del vector de velocidad en el tiempo, o dicho más propiamente, la derivada con respecto al tiempo del vector de velocidad. Como la velocidad ya es la derivada con respecto al tiempo del vector de posición, entonces la aceleración también se puede expresar como la segunda derivada con respecto al tiempo del vector de posición. La aceleración de una partícula puede venir del cambio de la magnitud del vector de velocidad en el tiempo o incluso del cambio de la dirección aún cuando su magnitud permanezca constante. Este tipo de aceleración la veremos más adelante.

Ecuaciones de Movimiento

Para comenzar el análisis de movimiento de una partícula tenemos que deducir las ecuaciones de movimiento considerando aceleración constante:

$$\bar{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Integrando ambos lados con respecto al tiempo:

$$\int \bar{a}dt = \int \frac{d\vec{V}}{dt} dt \to \int \bar{a}dt = \int d\vec{V}$$

$$\int_0^t \bar{a}dt = \int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}} d\vec{V} \to \bar{a}(t-0) = \vec{V} - \vec{V}_0$$

$$\therefore \vec{V} = \vec{V}_0 + \bar{a}t \qquad (1.4)$$

Esta es la primera ecuación de movimiento. Nótese que la velocidad y aceleración son vectores, por lo que está en su manera general para 3 dimensiones, el subíndice 0 representa la velocidad inicial o posición inicial.

Para deducir la segunda ecuación de movimiento partiremos del hecho de que:

$$\vec{V} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Integrando ambos lados con respecto al tiempo y cambiando el valor de la velocidad que habíamos obtenido anteriormente:

$$\int \vec{V}\,dt = \int \frac{d\vec{r}}{dt}\,dt \rightarrow \int \left(\vec{V}_0 + \vec{a}t\right)dt = \int d\vec{r} \rightarrow \int_0^t \left(\vec{V}_0 + \vec{a}t\right)dt = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} d\vec{r}$$

$$\vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 = \vec{r} - \vec{r}_0$$

$$\therefore \vec{r} = \vec{r}_0 + \vec{V}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2 \qquad (1.5)$$

Esta última ecuación representa la posición con respecto al tiempo para una aceleración constante. Nótese que la posición **r** es un vector que está, en principio, en tres dimensiones.

La deducción de la última ecuación de movimiento viene de usar la regla de la cadena en la ecuación (1.3):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d\vec{V}}{d\vec{r}}\frac{d\vec{r}}{dt}$$

La segunda parte de la ecuación representa una derivada que ya no se hace con respecto al tiempo tal que:

$$\vec{a} = \vec{V}\frac{d\vec{V}}{d\vec{r}}$$

Integrando ambos lados en esta ocasión con respecto a la posición:

$$\int \vec{a}\,d\vec{r} = \int \vec{V}\frac{d\vec{V}}{d\vec{r}}\,d\vec{r} \rightarrow \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{a}\,d\vec{r} = \int_{\vec{V}_0}^{\vec{V}} \vec{V}\,d\vec{V} \rightarrow \vec{a}\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) = \frac{\vec{V}^2}{2} - \frac{\vec{V}_0^{\,2}}{2}$$

$$\therefore \vec{V}^2 = \vec{V}_0^{\,2} + 2\vec{a}\left(\vec{r} - \vec{r}_0\right) \qquad (1.6)$$

Esta es la última ecuación de movimiento, pero independiente del tiempo. Nótese que también es una ecuación vectorial en tres dimensiones.