Trainingsblatt
Methoden der Faktorisierung

Um die Linearfaktoren eines Funktionsterms (und damit die Nullstellen der Funktion) zu bestimmen, sind verschiedene Methoden hilfreich.

1. Ausnutzen der binomischen Formeln
Beispiel: $f(x) = x^2+4x+4 = (x+2)^2$

a) $g(x) = x^2+26x+169 = (x+13)^2$

b) $h(x) = x^2-12x+36 = (x-6)^2$

c) $k(x) = x^2-49 = (x-7)\cdot(x+7)$

2. Lösen einer quadratischen Gleichung.
Beispiel: $u(x) = 2x^2+6x+\frac{5}{2} = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-6\pm\sqrt{36-4\cdot2\cdot\frac{5}{2}}}{2\cdot2} = \frac{-6\pm\sqrt{16}}{4} = \frac{-6\pm4}{4}$

$\Rightarrow x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow u(x) = 2\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)$ (Beachte den Faktor 2.)

a) $v(x) = 3x^2-7x+2 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{7\pm\sqrt{49-4\cdot3\cdot2}}{2\cdot3} = \frac{7\pm\sqrt{25}}{6} = \frac{7\pm5}{6}$

$\Rightarrow x_1 = 2;\ x_2 = \frac{1}{3} \Rightarrow v(x) = 3\cdot(x-2)\cdot\left(x-\frac{1}{3}\right)$

b) $w(x) = x^2+2x-1{,}25 = 0 \Rightarrow x_{1/2} = \frac{-2\pm\sqrt{4-4\cdot(-1{,}25)}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{9}}{2} = \frac{-2\pm3}{2}$

$\Rightarrow x_1 = \frac{1}{2};\ x_2 = -\frac{5}{2} \Rightarrow w(x) = \left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{5}{2}\right)$

3. Raten der Linearfaktoren, wenn bekannt ist, dass alle Nullstellen ganzzahlig sind.

	Versuch einer Faktorisierung		Probe durch Ausmultiplizieren		
Beispiel: $f(x) = x^2+12x+35$	$(x+5)\cdot(x+7)$	=	$x^2+5x+7x+35$	=	$f(x)$ ✓
a) $g(x) = x^2-8x+15$	$(x-5)\cdot(x-3)$	=	$x^2-5x-3x+15$	=	$g(x)$ ✓
b) $h(x) = x^2+2x-15$	$(x+5)\cdot(x-3)$	=	$x^2+5x-3x-15$	=	$h(x)$ ✓
c) $k(x) = x^2-5x-14$	$(x-7)\cdot(x+2)$	=	$x^2-7x+2x-14$	=	$k(x)$ ✓

4. Substitution, wenn nur bestimmte Potenzen vorkommen und so der Grad kleiner wird.
Beispiel: $r(x) = x^4-2x^2+1$ Setze $z = x^2$; $z^2-2z+1 \overset{\text{binom. Formel}}{=} (z-1)^2 = 0$

$\Rightarrow z_1 = 1;\ z_2 = 1 \Rightarrow x_{1/2} = \pm1;\ x_{3/4} = \pm1 \Rightarrow r(x) = (x-1)(x+1)(x-1)(x+1)$

a) $s(x) = x^4-\frac{5}{4}x^2+\frac{1}{4}$ Setze $z = x^2$; $z^2-\frac{5}{4}z+\frac{1}{4} \overset{\text{Lösen quadr. Gleichung}}{=} 0 \Rightarrow z_{1/2} = \frac{\frac{5}{4}\pm\sqrt{\frac{25}{16}-1}}{2} = \frac{\frac{5}{4}\pm\frac{3}{4}}{2}$

$\Rightarrow z_1 = 1;\ z_2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_{1/2} = \pm1;\ x_{3/4} = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow s(x) = (x-1)\cdot(x+1)\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(x+\frac{1}{2}\right)$

b) $t(x) = x^4-10x^2+21$ Setze $z = x^2$; $z^2-10z+21 \overset{\text{Raten der Linearfaktoren}}{=} (z-7)\cdot(z-3)$

$\Rightarrow z_1 = 7;\ z_2 = 3 \Rightarrow x_{1/2} = \pm\sqrt{7};\ x_{3/4} = \pm\sqrt{3} \Rightarrow t(x) = (x-\sqrt{7})\cdot(x+\sqrt{7})\cdot(x-\sqrt{3})\cdot(x+\sqrt{3})$

5. Ausklammern von x (oder Potenzen davon), falls möglich. Dann ist x (ggf. mehrfache) Nullstelle.
Beispiel: $f(x) = 2x^3-x^2 = x^2\cdot(2x-1) = x^2\cdot2\left(x-\frac{1}{2}\right)$

a) $g(x) = x^3-49x = x\cdot(x^2-49) = x\cdot(x-7)\cdot(x+7)$

b) $h(x) = 3x^4-6x^3 = 3x^3\cdot(x-2)$

c) $k(x) = 2x^5-4x^4+2x^3 = 2x^3\cdot(x^2-2x+1) = 2x^3\cdot(x-1)^2$