Con un file GeoGebra si può vedere che inserendo l'equazione $y = x$ in $\mathbb{R}^2$ si ottiene una retta, mentre in $\mathbb{R}^3$ la medesima equazione produce un piano, che in particolare contiene la retta di $\mathbb{R}^2$. In effetti in $\mathbb{R}^3$ i punti sulla retta sono del tipo $(t, t, 0)$, ma anche tutti i punti del tipo (t, t, s) soddifano l'equazione $y = x$.

Cosa otteniamo mediante l'equazione $x + y + z = 0$, oppure $x + y + z = 3$?

Mettiamoci intanto in una situazione nota. Sappiamo che dati due punti A e B dello spazio, il luogo geometrico dei punti equidistanti da A e da B è un piano passante per il punto medio M_{AB} del segmento AB e perpendicolare al segmento AB. Sfruttiamo questa proprietà per cercare l'equazione di tale piano.

Esercizio 1. Determinare un'equazione del luogo geometrico di punti P equidistanti da $A(1, 2, 3)$ e $B(3, 4, -1)$.

SOLUZIONE:

Dato il generico punto $P(x, y, z)$ di $\mathbb{R}^3$, imponiamo la condizione $\overline{PA} = \overline{PB}$ o meglio $\overline{PA}^2 = \overline{PB}^2$:

$$
\begin{aligned}
&(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = (x-3)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 \\
&x^2 - 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 + z^2 - 6z + 9 = x^2 - 6x + 9 + y^2 - 8y + 16 + z^2 + 2x + 1 \\
&4x + 4y - 8z = 12 \\
&x + y - 2z = 3
\end{aligned}
$$

Questa deve quindi essere un'equazione del piano π passante per il punto medio di AB e perpendicolare ad AB. Notiamo che $M_{AB}(2, 3, 1)$ e si verifica facilmente che tale punto soddisfa l'equazione trovata: $2+3-2\cdot 1 = 3$. Inoltre la direzione del segmento AB è descritta dal vettore $\mathbf{v} = B - A = (2, 2, -4)$. Possiamo verificare l'ortogonalità tra l'equazione del piano trovata e il segmento AB in qualche modo?

□

Come possiamo generalizzare quanto ottenuto? Proviamo a ragionare da un altro punto di vista.

Consideriamo il vettore $\mathbf{v_r} = B - A = (2, 2, -4)$. Sappiamo che esiste un solo piano π passante per l'origine e perpendicolare alla retta r passante per A e B. Inoltre, ogni retta contenuta in π è ortogonale a r, quindi ogni vettore $\mathbf{u}$ contenuto in π è ortogonale a $\mathbf{v_r}$.

Per trovare il piano π passante per l'origine e perpendicolare alla retta r ci basta perció cercare tutti i punti P dello spazio tali che i vettori $\mathbf{u} = P$ e $\mathbf{v_r}$ siano tra loro ortogonali. Sappiamo che due vettori $\mathbf{v_r}$ e $\mathbf{u}$ sono ortogonali se e solo se il loro prodotto scalare è zero. Quindi, il generico vettore $\mathbf{u} = P = (x, y, z)$ di $\mathbb{R}^3$ è ortogonale a $\mathbf{v_r}$ se e solo se

$$\mathbf{v_r} \cdot \mathbf{u} = 2x + 2y - 4z = 0$$

È quindi evidente che il luogo geometrico dei punti $P(x, y, z)$ dello spazio tali che $2x + 2y - 4z = 0$, cioè $x + y - 2z = 0$, è il piano π passante per l'origine e perpendicolare al vettore $\mathbf{v_r} = (2, 2, -4)$. Infine il piano π passante per l'origine e perpendicolare alla retta r di direzione $\mathbf{v_r} = (2, 2, -4)$ ha equazione

$$\pi: \ 2x + 2y - 4z = 0 \qquad \text{cioè} \qquad \pi: \ x + y - 2z = 0$$

Se ora vogliamo cercare il piano π' perpendicolare alla retta r, ovvero parallelo al piano π appena trovato, ma passante per il punto $P_0 = M_{AB}(2, 3, 1)$, consideriamo il generico punto P del piano π' cercato e il vettore $\mathbf{w} = P - P_0 = (x-2, y+1, z-3)$. Tale vettore è parallelo a π' e π, quindi è un vettore ortogonale a $\mathbf{v_r} = (2, 2, -4)$. Di conseguenza:

$$2(x-2) + 2(y-3) - 4(z-1) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad 2x + 2y - 4z = 6 \qquad \Rightarrow \qquad x + y - 2z = 3$$

Quindi il piano π' passante per $P_0(2, 3, 1)$ e ortogonale alla retta r, cioè al vettore $\mathbf{v_r} = (2, 2, -4)$, ha equazione

$$\pi': \ 2x + 2y - 4z = 6 \qquad \text{cioè} \qquad \pi': \ x + y - 2z = 3$$

Abbiamo in effetti ottenuto la stessa equazione dell'esercizio appena svolto.

Notiamo che la condizione $(P - P_0)\cdot\mathbf{v} = 0$ può essere equivalentemente scritta nella forma $P\cdot\mathbf{v} = P_0\cdot\mathbf{v}$, ottenendo più facilmente:

$$2x + 2y - 4z = 2\cdot 2 + 2\cdot 3 - 4\cdot 1 \qquad \Rightarrow \qquad x + y - 2z = 3$$

In generale quindi l'**equazione cartesiana di un piano** passante per un punto P_0 e perpendicolare al vettore $\mathbf{v} = \mathbf{v}_\perp(a, b, c)$ è data da

$$\boxed{\pi: \ P\cdot\mathbf{v}_\perp = P_0\cdot\mathbf{v}_\perp \quad \Rightarrow \quad \pi: \ ax + by + cz = d \quad \text{con } d = P_0\cdot\mathbf{v}_\perp}$$

Ricordiamo che due piani in $\mathbb{R}^3$ possono essere:

- **Paralleli**. In questo caso sono entrambi ortogonali allo stesso vettore $\mathbf{v} = (a, b, c)$, quindi possono essere scritti nella forma $\pi_1: \ ax + by + cz = d_1$ e $\pi_2: \ ax + by + cz = d_2$ per opportuni $d_1, d_2 \in \mathbb{R}$.

- **Incidenti**. In questo caso la loro intersezione è una retta. Per esempio il sistema di equazioni

$$r: \begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 3x + y + z = 5 \end{cases}$$

descrive la retta r, intersezione dei due piani $\pi_1: \ x + 2y - z = 1$ e $\pi_2: \ 3x + y + z = 5$. Un tale sistema è anche detto **equazione cartesiana** della retta r.

Possiamo però anche ragionare da un punto di vista completamente diverso. Lavorando in $\mathbb{R}^2$ abbiamo visto che le combinazioni lineari $P = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ di due vettori $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ con direzioni diverse descrivono tutto il piano $\mathbb{R}^2$ al variare di $s, t \in \mathbb{R}$.

Con un file GeoGebra (v. Esercizi 11 e 12) ci si convince facilmente che dati due vettori$\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ di $\mathbb{R}^3$ con direzioni diverse, le loro combinazioni lineari $P = s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ descrivono, al variare di $s, t \in \mathbb{R}$, un piano di $\mathbb{R}^3$ passante per l'origine e contenente in particolare le rette $s\mathbf{u}$ e $t\mathbf{v}$.

Analogamente, dato un ulteriore punto o vettore P_0, le combinazioni lineari $P = P_0 + s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$ descrivono, al variare di $s, t \in \mathbb{R}$, un piano π di $\mathbb{R}^3$ passante per P_0 e parallelo al piano $s\mathbf{u} + t\mathbf{v}$. Il piano π contiene in particolare le rette $P_0 + t\mathbf{u}$ e $P_0 + s\mathbf{v}$.

Di conseguenza l'**equazione parametrica di un piano** di $\mathbb{R}^3$ è del tipo

$$\pi: \ P = P_o + t\mathbf{u} + s\mathbf{v} \ \Rightarrow \ (x, y, z) = (x_0 + tu_x + sv_x, \ y_0 + tu_y + sv_y, \ z_0 + u_z + sv_z) \ \Rightarrow$$

$$\pi: \begin{cases} x = x_0 + tu_x + sv_xt \\ y = y_0 + tu_y + sv_y \\ z = z_0 + u_z + sv_z \end{cases} \quad \forall s, t \in \mathbb{R}$$

dove P_0 è un punto di π e $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$ e $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ sono due vettori paralleli a π.

Esercizio 2. Determinare un'equazione parametrica del piano π passante per i punti $A(1, 3, 1)$, $B(2, 0, 0)$ e $C(0, 1, 1)$.

Soluzione:

Determiniamo due direzioni parallele al piano π cercato:

$$\mathbf{u} = B - A = (1, -3, -1) \qquad \text{e} \qquad \mathbf{v} = C - A = (-1, -2, 0)$$

Di conseguenza π è dato per esempio dai punti $P = B + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$:

$$\pi: \ (x, y, z) = (2, 0, 0) + t(1, -3, -1) + s(-1, -2, 0) \ \Rightarrow \ \pi: \begin{cases} x = 2 + t - s \\ y = -3t - 2s \\ z = -t \end{cases} \quad \forall \ t, \ s \ \in \ \mathbb{R}$$

$\square$