Teoría – Tema 9

Teoría - 2 - ecuaciones de la recta - parte 1 de 2

Ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta

Si en dos dimensiones obteníamos la ecuación vectorial de la recta a partir de un punto de la recta y un vector director de la misma, en tres dimensiones razonamos de manera análoga (añadiendo la tercera componente a nuestros resultados).

Sea $A(x_0, y_0, z_0)$ un punto perteneciente a la recta r . Sea $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ un vector director de la recta r .

Ecuación vectorial de la recta

$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y, u_z)$

(x, y, z) → Punto arbitrario de la recta

(x_0, y_0, z_0) → Coordenadas de un punto concreto perteneciente a la recta

λ → Parámetro perteneciente a los números reales

(u_x, u_y, u_z) → Componentes de uno de los vectores directores de la recta

Ecuación paramétrica de la recta

Si trabajamos por componentes separadas en la ecuación vectorial, obtenemos la ecuación paramétrica.

Pasamos de la ecuación vectorial $(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y, u_z)$ a la ecuación paramétrica igualando componentes.

$$\left\{\begin{matrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \\ z=z_0+\lambda\cdot u_z \end{matrix}\right\}$$

Ecuación cartesiana o continua de la recta

Pasamos de la ecuación paramétrica a la ecuación cartesiana o continua despejando el parámetro λ e igualando.

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$$

Ejemplo 1 resuelto

Hallar la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta r que pasando por el punto $A(1,-1,3)$ es paralela a la recta de ecuación $s:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$.

Sabemos que dos rectas paralelas tienen la misma inclinación, por lo que comparten los mismos vectores directores.

La recta s aparece en forma continua, por lo que su vector director es $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)=(-2,3,4)$ y es paralelo a la recta r que estamos buscando.

Si tenemos un punto y un vector director, ya podemos escribir la ecuación vectorial de r .

$$r:(x, y, z)=(1,-1,3)+\lambda\cdot(-2,3,4)$$

Igualando componentes, tenemos la ecuación paramétrica.

$$r:\left\{\begin{matrix} x=1+\lambda\cdot(-2) \\ y=-1+\lambda\cdot 3 \\ z=3+\lambda\cdot 4 \end{matrix}\right\}$$

Y despejando el parámetro λ en cada ecuación paramétrica e igualando, obtenemos la ecuación continua de r .

$$r:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{4}$$

A veces esta ecuación continua se expresa de otras formas análogas. Por ejemplo, igualando cada término a λ y formando una terna de ecuaciones.

$$r:\left\{\begin{matrix} \lambda=\frac{x-1}{-2} \\ \lambda=\frac{y+1}{3} \\ \lambda=\frac{z-3}{4} \end{matrix}\right\}$$

Otras veces se expresa la recta como dos igualdades separadas.

$$r:\left\{\begin{matrix} \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3} \\ \frac{x-1}{-2}=\frac{z-3}{4} \end{matrix}\right\}$$

Ejemplo 2 resuelto

Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(1,-1,3)$ **y** $B(0,2,4)$ **.**

Si tengo dos puntos de una recta, tengo un vector director de la recta restando las componentes de ambos puntos.

$\vec{AB}=(0-1,2+1,4-3)=(-1,3,1)$ → vector director de la recta

Y si tenemos un punto (podemos elegir A o B) y un vector director, directamente podemos escribir la ecuación continua de la recta.

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$$