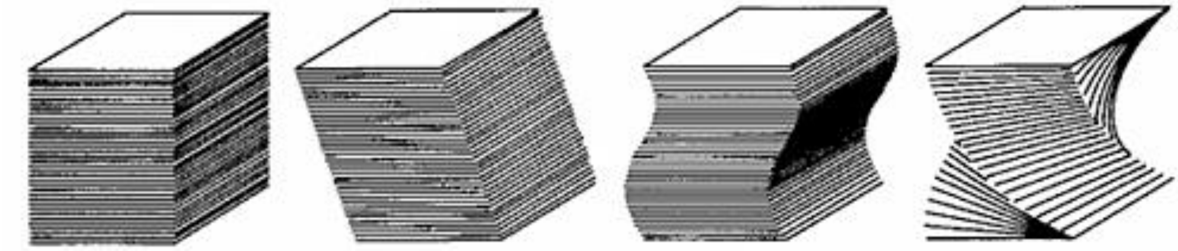
Klasse Mathematik Datum:

Das Volumen der Pyramide

Bonaventura Cavalieri (1598-1647) war italienischer Mathematiker, Mönch und Astronom.

1. Der Satz von Cavalieri

Was haben alle vier Papierstapel gemeinsam?



____

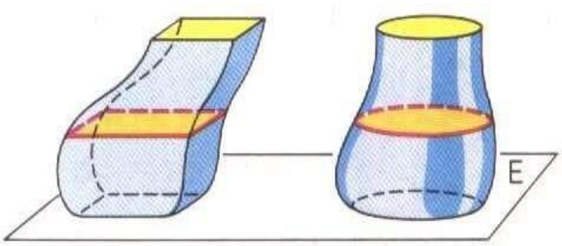
____

____

Die obigen Beobachtungen lassen sich für andere Körper verallgemeinern:

Zwei Körper haben das gleiche Volumen, wenn die drei folgenden Bedingungen gelten:

- Die Flächeninhalte der beiden ________________________ sind gleich:
- Beide Körper haben die gleiche ____________________.
- Für jeden Schnitt mit einer zur _______________ _________________ Ebene, haben die Schnittflächen der beiden Körper jeweils den _____________ ___________________________.



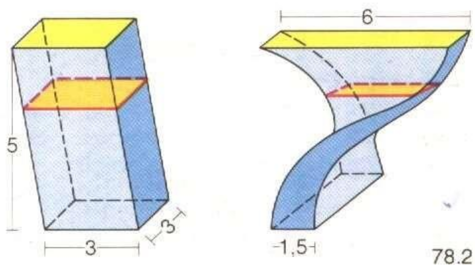
Beispiel:
Zeige, dass die beiden nebenstehenden Figuren das gleiche Volumen besitzen, und berechne diesen.

____

____

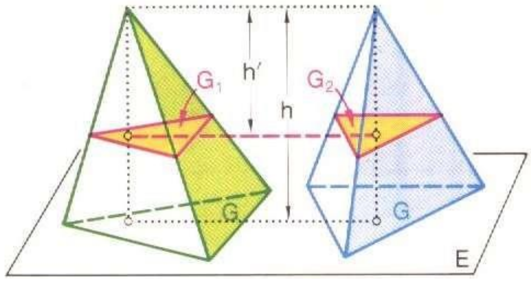
____

____



2. Anwendung des Satzes auf Pyramiden

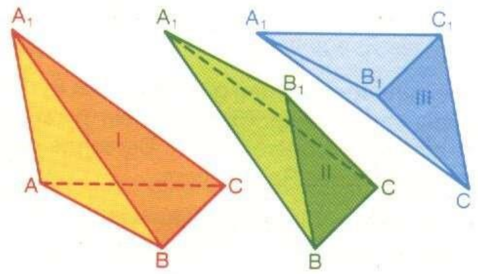
Rechts siehst du zwei unterschiedliche Pyramiden, die aber die gleiche Höhe und identische Grundflächen haben. Mithilfe des Strahlensatzes kann man beweisen, dass dann auch die Schnittflächen G_1 und G_2, die beim Schnitt einer zur Grundfläche parallelen Ebene entstehen, identisch sein müssen. Nach dem Satz von Cavalieri folgt also:



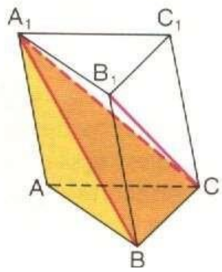
Zwei Pyramiden mit ___________ ________ ______ ____________ ______________ besitzen das gleiche Volumen.

3. Das Volumen einer dreiseitigen Pyramide

Wir ergänzen eine dreiseitige Pyramide (I), deren Volumen wir berechnen wollen, durch zwei Ergänzungspyramiden (II) und (III) zu einem dreiseitigen Prisma. Da je zwei Pyramiden stets in Grundfläche und Höhe übereinstimmen, stimmen deren drei Volumina also überein.



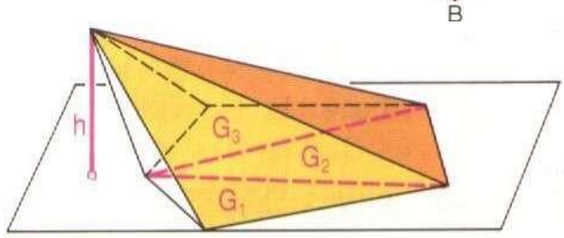
Der Rauminhalt des Prismas berechnet sich durch ____________ .



Damit ergibt sich für das Volumen der Pyramide: ______________

4. Das Volumen einer beliebigen Pyramide

Jede Pyramide lässt sich (wie nebenstehende Figur zeigt) in dreiseitige Pyramiden zerlegen. Sind $G_1, \dots, G_n$ ihre Grundflächen, so gilt:



$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G_1 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot G_2 \cdot h + \frac{1}{3} \cdot G_3 \cdot h + \cdots + \frac{1}{3} \cdot G_n \cdot h$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (G_1 + G_2 + G_3 + \cdots + G_n) \cdot h = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Merke:

Eine Pyramide mit Grundfläche G und Höhe h hat den Rauminhalt: $V_{Pyramide}$ =