Teoría – Tema 9

Teoría - 2 - Definición formal de derivada

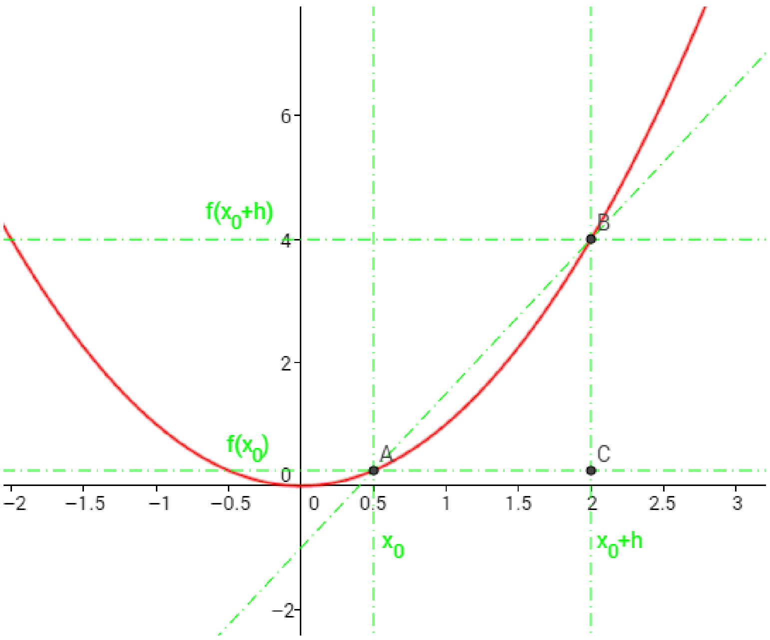
Incremento medio e incremento instantáneo de una función f(x)

Vamos a acercarnos al concepto de derivada de una función.

Supongamos una función genérica *f(x)* y un punto x_0 perteneciente al dominio de la función. Consideremos una cantidad $h > 0$. Podemos definir la tasa de variación media o el **incremento medio de la función *f(x)*** para el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ de la forma:

$$Incremento\ medio\ de\ f(x)\ en\ [x_0, x_0+h] = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

------- *f(x) arbitrario*



Del triángulo rectángulo *ABC* representado en la gráfica podemos ver el incremento medio de *f(x)* en el intervalo $[x_0, x_0 + h]$ como el cociente entre la altura y la base del triángulo.

Altura → $f(x_0 + h) - f(x_0)$

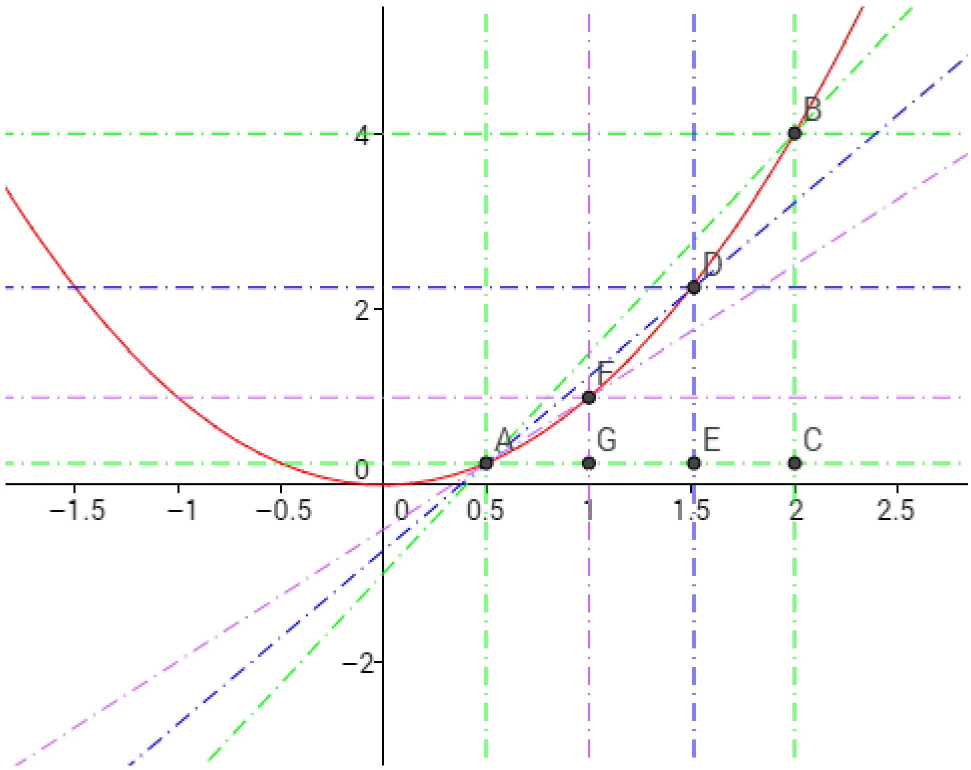
Base → $x_0 + h – x_0 = h$

Es más, si consideramos el ángulo del vértice *A* podemos ver el incremento medio de *f(x)* como la tangente del ángulo *A*.

$$tg(A)=\frac{lado\ opuesto}{lado\ contiguo}=\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si tomamos valores de *h* cada vez más pequeños, el valor $x_0 + h$ se acercará progresivamente a x_0.

------- *f(x) arbitrario*



Es fácil intuir que en el caso límite *h → 0* tendremos $x_0 + h \rightarrow x_0$, y la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ ya no cortará a la gráfica de f(x) en dos puntos sino únicamente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Para *h → 0* ya no hablamos de incremento medio sino de **incremento instantáneo de *f(x)***.

Es decir, en el caso límite *h → 0* la recta que une los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$ será tangente a *f(x)* en el punto $(x_0, f(x_0))$ y su pendiente (tangente del ángulo *A*) será igual al valor del incremento instantáneo de f(x).

$$Incremento\ instantáneo\ de\ f(x)\ en\ x_0=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Para un punto genérico *x* este incremento instantáneo de *f(x)* es su derivada. Y su **interpretación geométrica nos dice que la derivada de *f(x)* en el punto genérico *x* es igual al valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto *x***.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad \leftrightarrow \quad \frac{d[f(x)]}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Esta expresión se conoce como definición formal o analítica de la derivada de *f(x).* **Si una función es derivable en x_0 también será continua en x_0. El inverso, no siempre es cierto**.

Un ejemplo de aplicación de la definición formal de derivada

Vamos a aplicar, a modo de ejemplo, la definición formal de derivada a la función $f(x)=\frac{1}{x}$.

Recordamos la definición analítica de derivada.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Aplicado a nuestra función.

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x\cdot(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-h}{x\cdot(x+h)}}{h}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{x\cdot(x+h)}:\frac{h}{1}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{xh\cdot(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x\cdot(x+h)}$$

Evaluamos el límite (fíjate que la variable del límite es h y no x).

$$f'(x)=\frac{-1}{x\cdot(x+0)}=\frac{-1}{x^2}$$

Por lo tanto.

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}$$

Realizar este proceso para derivar cualquier función es largo, tedioso y puede convertirse en un proceso nada trivial. Por eso recurriremos a las famosas **tablas de derivación**, para aprender la forma de las derivadas de las funciones y de la composición de funciones más usuales.