# 1.4图解函数的极限及函数极限的简单计算

**【内容分析】**

本节是本章和整个微积分的基础，研究函数在六种趋向下的极限。

**【教学内容】**

1.六种趋向下函数的极限
2.基本初等函数、多项式函数、有理函数求极限

**【重难点】**

重点图解函数极限的方法。
难点是单侧极限的代数方法。

**【知识目标】**

1.熟练掌握基本初等函数极限
2.深度理解六种趋向下函数的极限

**【能力目标】**

1.会求多项式函数、有理函数的极限
2.能借助图像分析求解分段函数、初等函数的极限

**【过程和方法目标】**

在学生课前实验探究的基础上，课堂集体总结归纳，强化练习初等函数的单侧极限，通过技能计算的练习，积累计算的方法和化简的技巧.

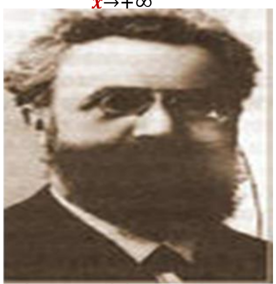
**【情感态度和价值观目标】**

1在数列极限的计算过程中,鼓励学生口答， 动手实践，反复练习，熟能生巧，培养劳动意识。
2. 进行GGB实验、演示分析，突破难点，培养数学建模和数学软件的应用能力。
3. 组织启发、 口答、 讨论、探究等课堂活动养成自主、探究、反思的学习习惯；培养学生交流沟通，团队合作、竞争自信的职业素质和诚实认真的道德品质。

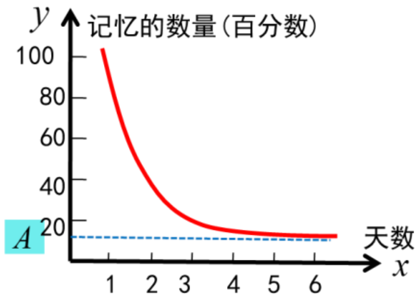
## 1.4.1图解函数的极限

**【情景设计】**人们在学习中的遗忘是有规律的,遗忘的进程不是均衡的,到了相当长的时候后,几乎就不再遗忘了.该问题可理解为:当时间$x$趋于正无穷大时,记忆的数量$y$将以A为极限.

$x \to +\infty, y \to A$； $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$



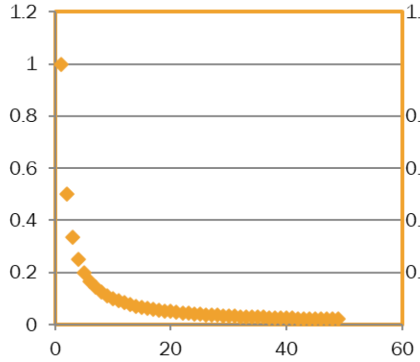
德国心理学家:艾宾浩斯
(H.Ebbinghaus)

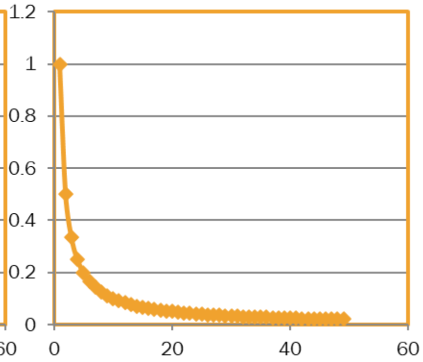



艾宾浩斯遗忘曲线

问题： $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=?$ $\xrightarrow[\text{敛散性一致}]{\text{换个字母}}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=?$

数列$y_n=\frac{1}{n}$数据拟合函数$y=\frac{1}{x}$




思考：$x\to+\infty$？图解口诀？取正值且无限增大； $y$轴右侧一直往右看。

【课前自学】预备知识：函数的极限的6种趋向，图解法口诀.

**图解自变量$x$变化过程的6种形式的极限口诀**

单向极限

① $x\to+\infty$, $f(x)\to A$ $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

口诀：y轴右侧，一直往右看.

② $x\to-\infty$, $f(x)\to A$ $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$

口诀：y轴左侧，一直往左看.

双向极限

③ $x\to\infty$, $f(x)\to A$ $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

充要条件：①②的极限都存在且相等.

单侧极限

④ $x\to x_0^-$, $f(x)\to A$ $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A$

左极限 口诀：从左侧趋向于x=$x_0$轴

⑤ $x\to x_0^+$, $f(x)\to A$ $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=A$

右极限 口诀：从右侧趋向于x=$x_0$轴.

双侧极限

⑥ $x\to x_0$, $f(x)\to A$ $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

充要条件：④⑤的极限都存在且相等.

**【课前实验探究活动】**

1.小组合作，用GGB图解下列函数的极限

| 函数 | 形式 | 图像 | $x\to+\infty$ | $x\to-\infty$ | $x\to\infty$ | $x\to 2^-$ | $x\to 2^+$ | $x\to 2$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1.常函数 | y=2 | | | | | | | |
| 2.幂函数 | y=x | | | | | | | |
| | $y=\frac{1}{x}$ | | | | | | | |
| | $y=x^2$ | | | | | | | |
| | $y=x^{\frac{1}{2}}$ | | | | | | | |
| | $y=x^3$ | | | | | | | |
| 3.指数函数 | $y=2^x$ | | | | | | | |
| | $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ | | | | | | | |
| 4.对数函数 | $y=\log_2 x$ | | | | | | | |
| | $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5.三角函数 | y=sinx | | | | | | | |
| | y=cosx | | | | | | | |

**2.思考与观察**

## 一、函数的单向极限

**第一组（类比与复习）：**

① $x \to +\infty$时,常函数极限都是它本身吗?

______________________________________________.

② $x \to +\infty$时,幂函数，指数是零、正数、负数各有什么规律?

______________________________________________

③ $x \to +\infty$时,指数函数，底数a>1，0<a<1 各有什么规律?

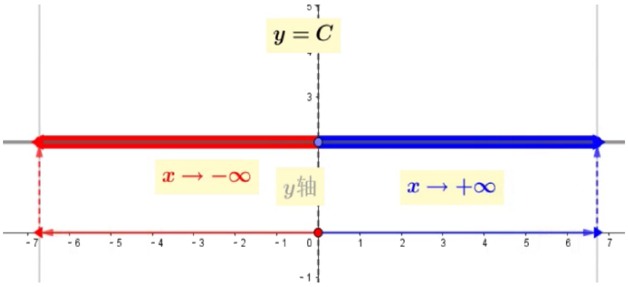
______________________________________________

④ $x \to +\infty$时,对数函数，底数 a>1，0<a<1各有什么规律?

______________________________________________

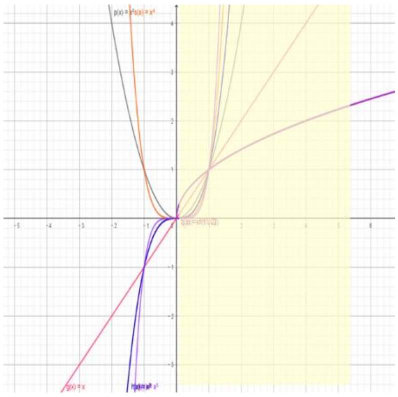
**第二组（新授）：**

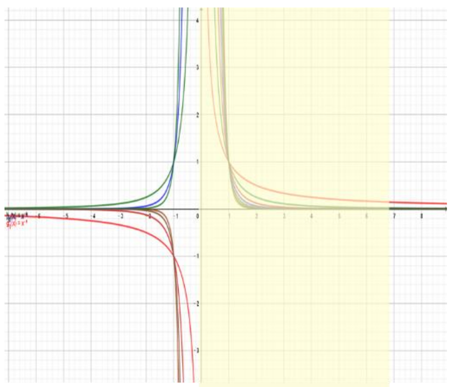
⑤ $x \to -\infty$，$x \to \infty$时,常函数极限都是它本身吗?




______________________________________________.

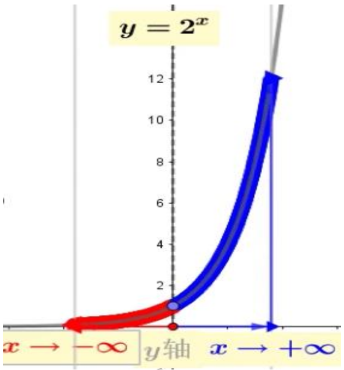
⑥ $x \to -\infty$，$x \to \infty$时,幂函数，指数是零、正数、负数各有什么规律?

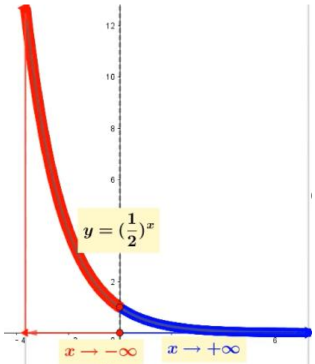




______________________________________________

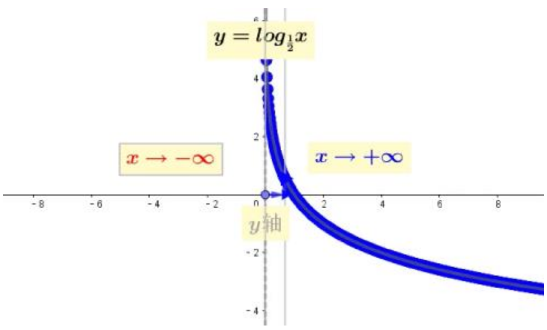
⑦ $x \to -\infty$，$x \to \infty$时,指数函数，底数a>1，0<a<1 各有什么规律?

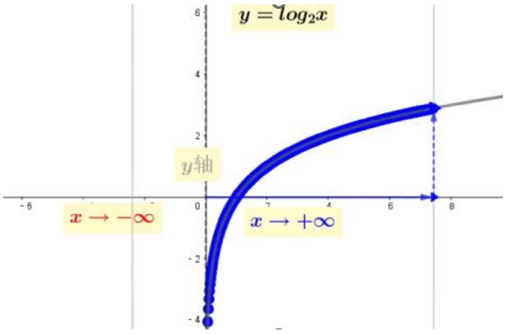



---

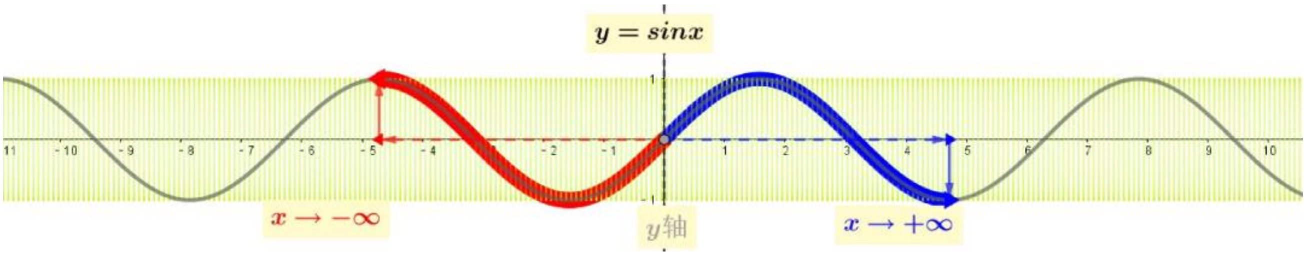
⑧ $x\to-\infty$，$x\to\infty$时,对数函数，底数 a>1，0<a<1各有什么规律?



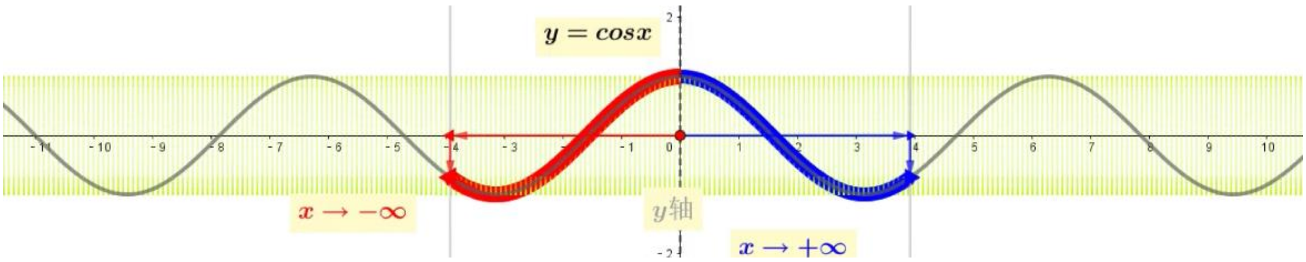




---

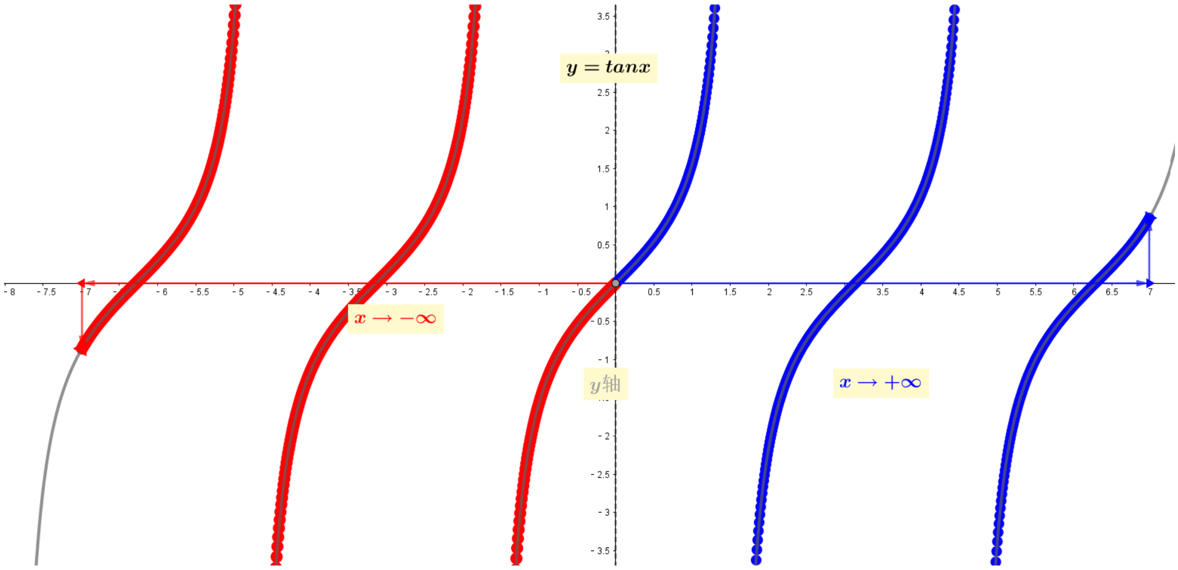
⑨ $x\to-\infty$，$x\to\infty$时,正、余弦函数的极限存在吗?

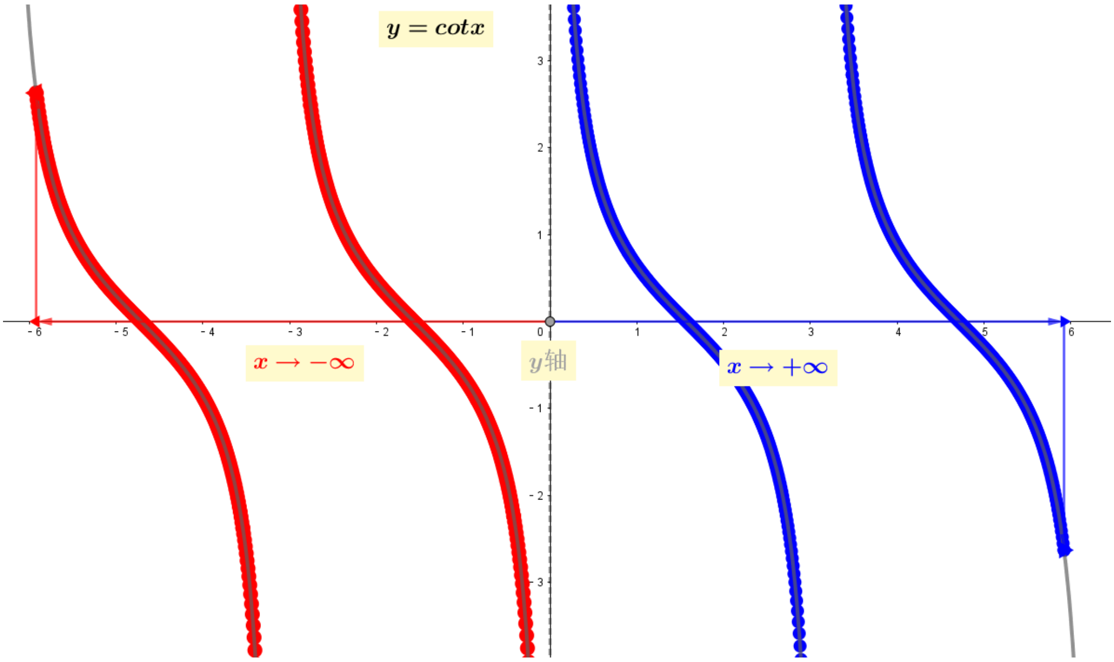



---




---




**【口答练习】**

第一组：① $\lim\limits_{x\to+\infty} x =$____；② $\lim\limits_{x\to+\infty} cosx =$____；③ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} =$____；④ $\lim\limits_{x\to+\infty} lnx =$____；

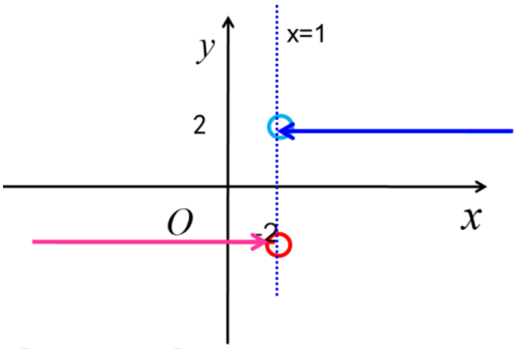
第二组：① $\lim\limits_{x\to-\infty} x =$____；② $\lim\limits_{x\to-\infty} cosx =$____；③ $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} =$____；④ $\lim\limits_{x\to-\infty} lnx =$____；

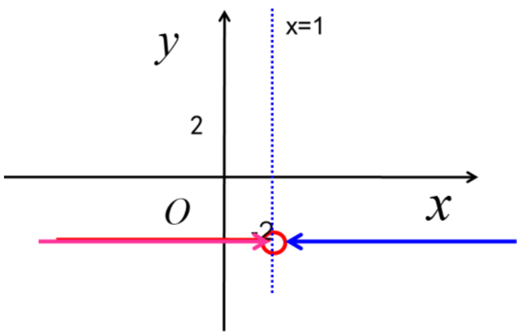
第三组：① $\lim\limits_{x\to\infty} x =$____；② $\lim\limits_{x\to\infty} cosx =$____；③ $\lim\limits_{x\to\infty} e^{-x} =$____；④ $\lim\limits_{x\to\infty} lnx =$____ .

## 二、函数的单侧极限

**单侧极限的图解步骤：**

1. 画出轴 $x = x_0$；
2. 沿着函数图象从右侧（左侧）趋向轴 $x = x_0$，找到趋向的点；
3. 趋向的点的纵坐标对应函数的右极限（左极限）.



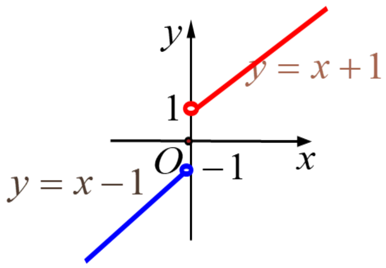




【分析与思考】

①分析下列函数在$x \to 1$时，函数的极限存在吗？为什么？，

②该点无定义会影响函数的极限吗？极限研究的区间是怎样的？

**例1.**$f(x)=\begin{cases} x-1, x<0 \\ 0, x=0 \\ x+1, x>0 \end{cases}$ 讨论$x \to 0$时，f(x)的极限是否存在.




**解：** $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x-1)=-1$；$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}(x+1)=1$；$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

*显然，* $f(0^-)\neq f(0^+)$.所以$\lim\limits_{x\to 0} f(x)$不存在.

【探究与归纳】

**观察6个基本初等函数的图像，求在自变量x趋向于常数1，2，3时的极限.并思考讨论以下几个问题.**

1.常函数的极限______它本身（填=、≠）,与趋向______.（填有关，无关).

2.幂函数在定义域内某点处的左、右极限都存在且相等，且都______这一点的函数值.（填=、≠）;

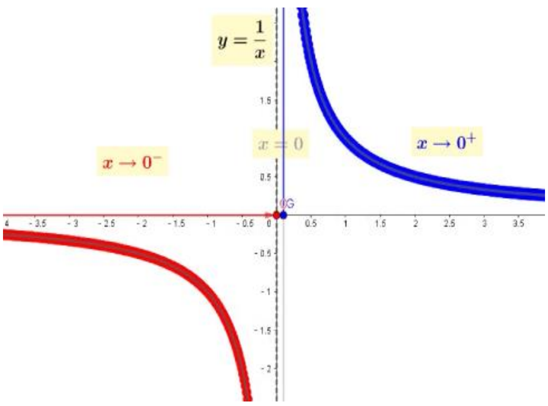
再结合四则运算法则，可以得出：

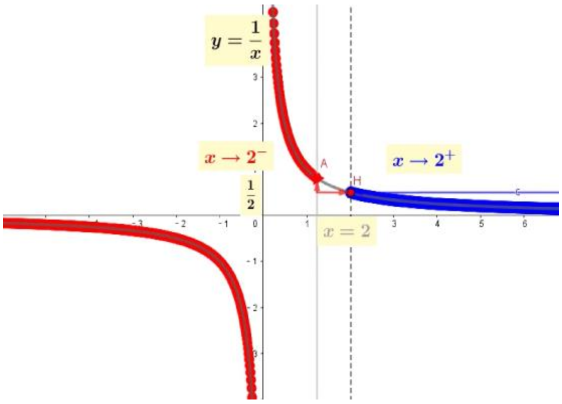
> **结论1：多项式函数**在某点处的左、右极限都存在且都等于这一点的函数值.

**例2.** **反比例**函数定义域是______________；

**反比例**函数在非0点处的左、右极限都存在且相等，且都______这一点的函数值.（填=、≠）;

**反比例**函数在0点处函数值不存在，在0处的左极限=______，右极限=______，极限______；




【深度思考】

观察上述两个函数的极限，研究$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$**存在的条件：**

① **函数**f(x)在$x_0$处一定有定义吗？

答：$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$可以在$x_0$处没定义。

即**$f(x)$在$x_0$处有定义是函数在$x_0$处极限存在的无关条件。**

② 研究的区间可以没有定义吗?

答:函数的极限可以不包括端点,但必须在**定义的区间内**研究。

例如$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$**必须在**$x_0$**附近有定义**,$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$**必须在**$x_0$左侧有定义,$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$**必须在**$x_0$右侧有定义;而$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$**必须在**$(0,+\infty)$有定义,$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$**必须在**$(-\infty,0)$有定义,$\lim\limits_{x\to \infty} f(x)$**必须在**$(-\infty,+\infty)$有定义,否则函数极限研究没有意义,极限不存在。

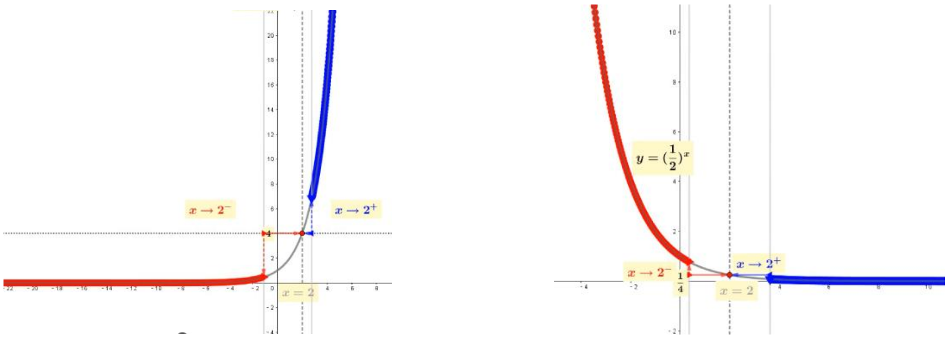
③ **离**$x_0$较远的点,对函数极限有影响吗?

答:$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$**讨论的是**$x_0$附近的点,**离**$x_0$较远的点对函数极限没影响。

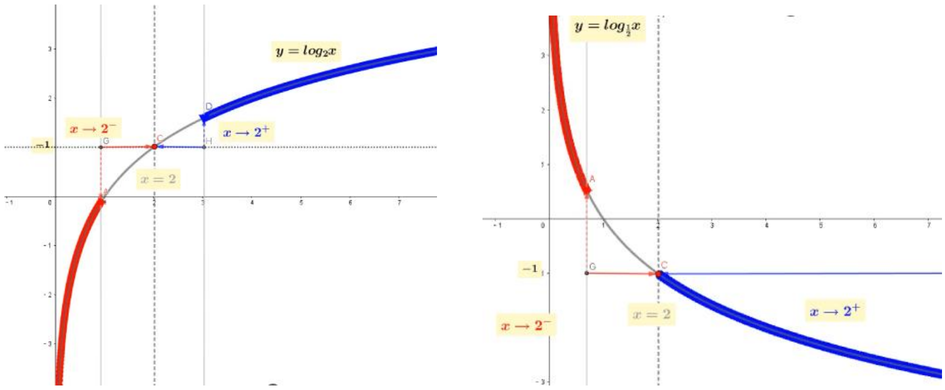
具体地说$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$**研究的是**$x_0$**的去心邻域。**因此,我们可以给出函数极限的严格化定义:

## 三、图解基本初等函数的极限

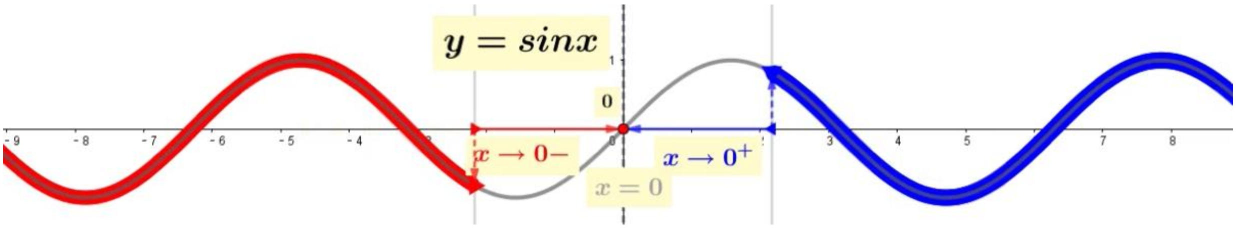
**3.**$x\to 2^-$,$x\to 2^+$时,指数函数的极限,底数a>1,0<a<1 各有什么规律?

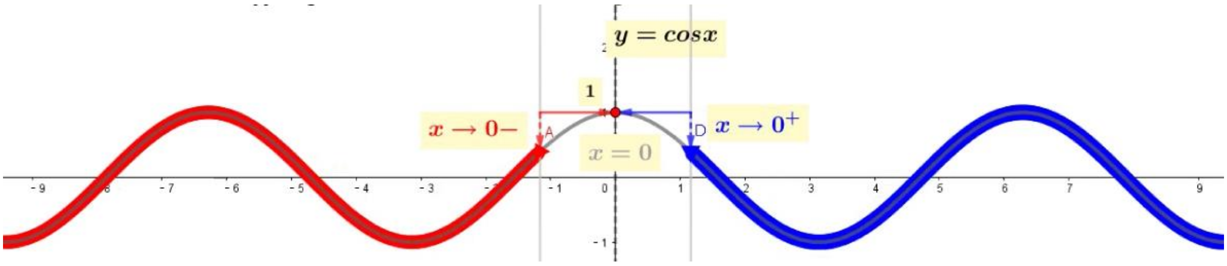


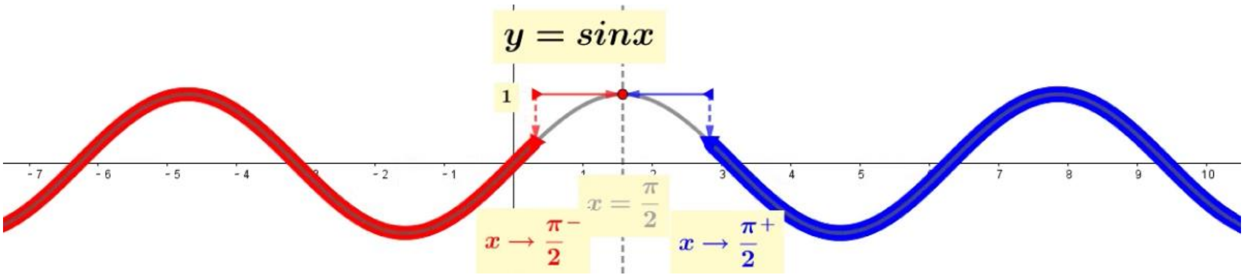

**4.**$x\to 2^-$,$x\to 2^+$时,对数函数的极限,底数a>1,0<a<1 时各有什么规律?

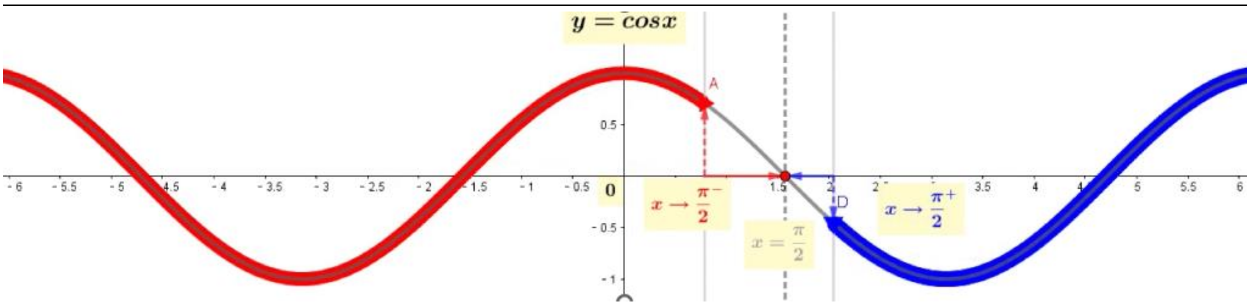



**5.**$x\to 0^-$,$x\to 0^+$时,正弦函数,余弦函数的极限各有什么规律?

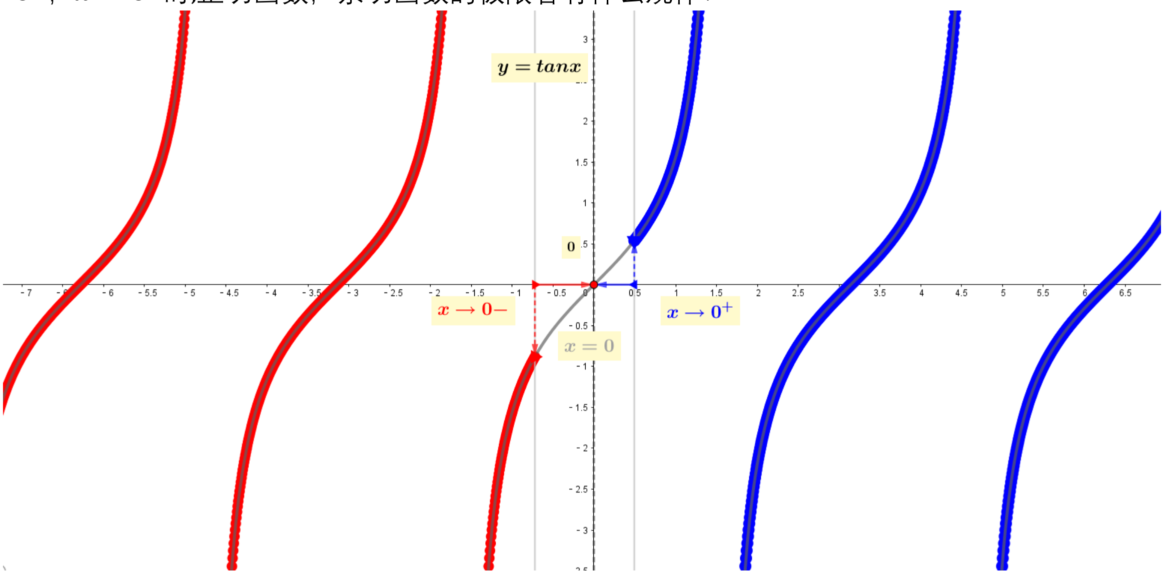


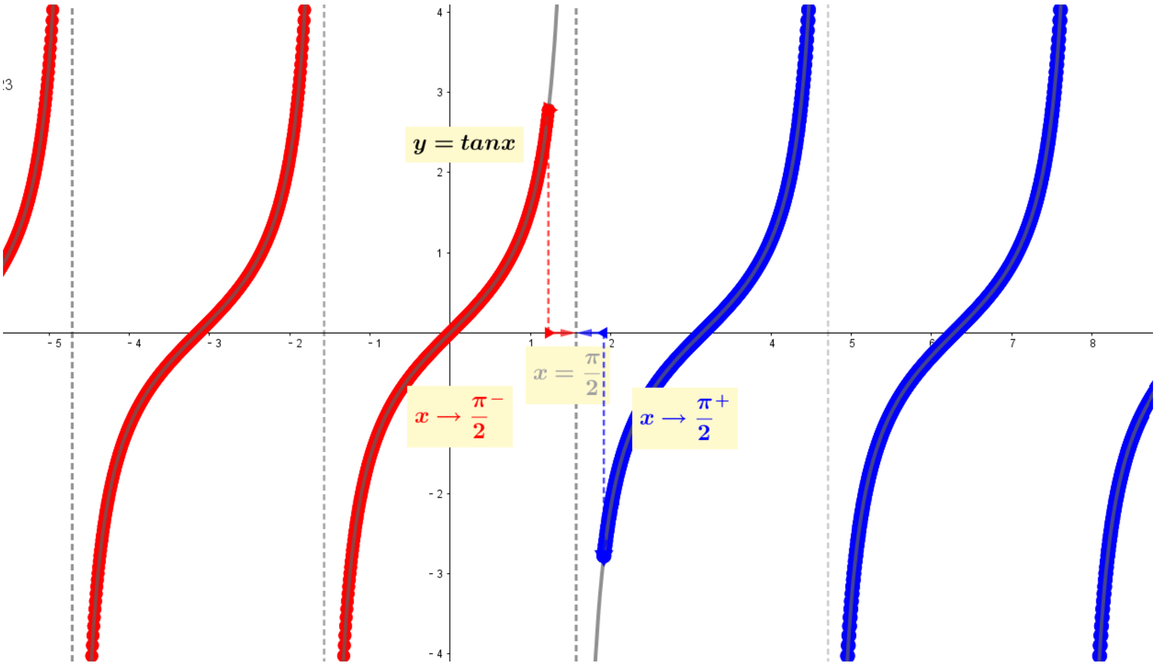



**6.** $x \to 0^-$，$x \to 0^+$时,正切函数，余切函数的极限各有什么规律?






通过以上分析，我们可以得到以下结论：

**结论2：基本初等函数在其定义的区间内的点处的左、右极限都存在且相等且都等于这一点的函数值.**

**【口答练习】**

**第四组：**

① $\lim\limits_{x\to 2}\log_2 x =$____ ;② $\lim\limits_{x\to 4}\log_{\frac{1}{2}} 2 =$____ ; ③ $\lim\limits_{x\to 2} 2^x =$____ ; ④ $\lim\limits_{x\to 1}(\frac{1}{2})^x =$____ ;⑤$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} sinx =$____ ;

⑥$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} cosx =$____ ; ⑦$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}} tanx =$____ ;

**【拓展】**

## *四、函数极限的严格化定义

**1.双向极限的$\varepsilon-\delta$语言**

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x: |x| > X \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

① $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x: x < -X \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$;

② $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists X > 0, \forall x: x > X \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

**定理2.4.1** $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A.$

**2.双侧极限的$\varepsilon-\delta$语言**

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x: 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

③$f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x: x_0 - \delta < x < x_0 \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$;

④$f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, \forall x: x_0 < x < x_0 + \delta \Longrightarrow |f(x) - A| < \varepsilon.$

**定理2.4.2** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A.$

## 1.4.2函数的极限的四则运算法则及简单计算

函数极限的四则运算和复合法则同数列.根据极限的运算法则，我们可以把上述结论可以推广到初等函数.

**结论3：初等函数在其定义的区间内的点处的左、右极限都存在且相等且都等于这一点的函数值.**

**【课堂练习】做一做，讲一讲.**

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+1)=$

**解析：** 多项式函数在某点处求极限，直接代数。

2. $\lim\limits_{n\to +\infty}\frac{n}{n+1}=$

解析：有理函数求极限$x\to\infty$时的极限，上节课所学。

3. $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}=$

**解析：** 初等函数在定义域内某点处求极限，直接代数后，发现分母的极限是0，可以先化简成分母的极限不是0的初等函数，再代数。常用的化简技巧后边有习题课强化练习。

4. $\lim\limits_{x\to 2^+}e^{-x}=$

解析：初等函数在定义域内某点处求极限，直接代数。

5. $f(x)=\begin{cases}x^2+1, x<0\\ x, x>0\end{cases}$，求$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=$____；$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=$____；$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=$____.

**解析：** 分段函数在定义域内某点处求极限，根据单、双侧极限的定义，分三步：

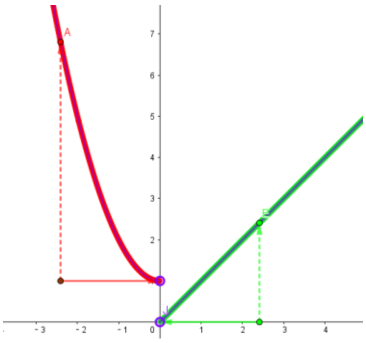
**第一步、求$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2+1)=1$**

**第二步、求$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}x=0$**

**第三步、$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)$**

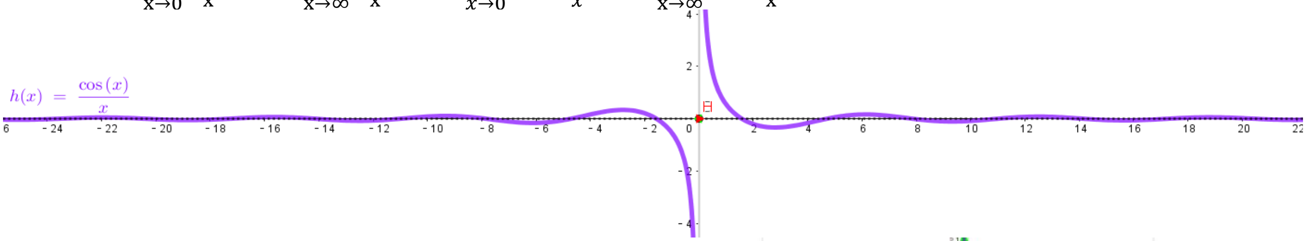
根据**定理2.4.2 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=A.$**

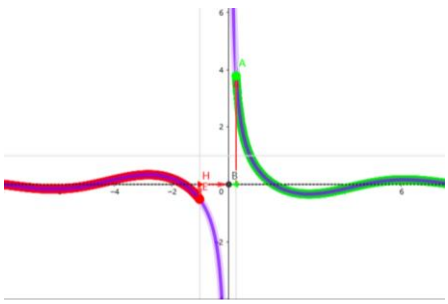
判别$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ *不存在*。

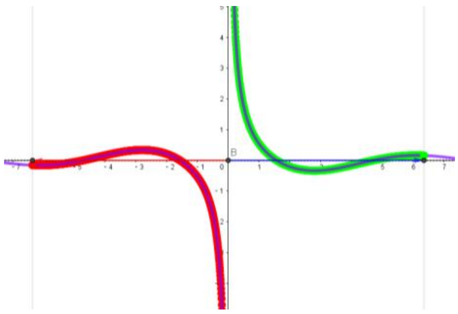


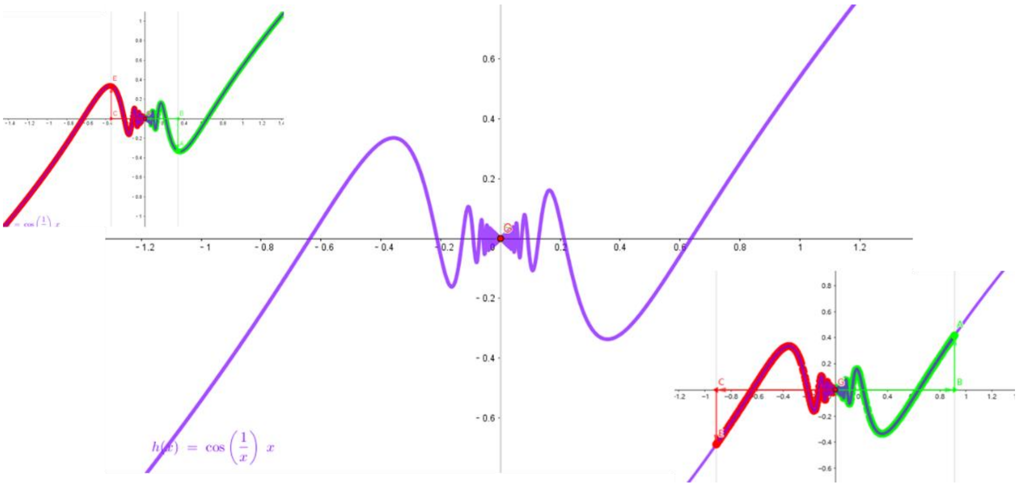
**【作业】分组实验探究,并图解下列函数的极限**

**第一组：** ①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}=$?②$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos x}{x}=$?③$\lim\limits_{x\to 0}x\cos\frac{1}{x}=$?④$\lim\limits_{x\to\infty}x\cos\frac{1}{x}=$?

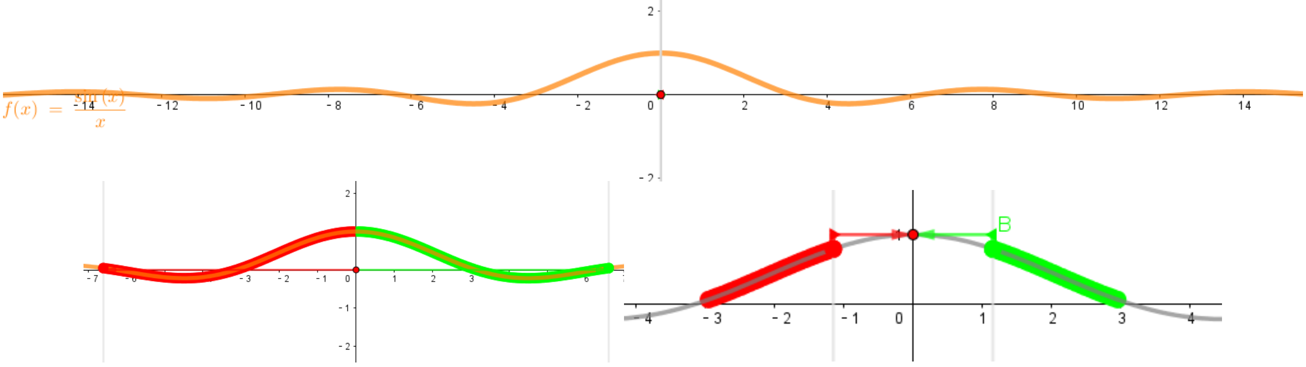


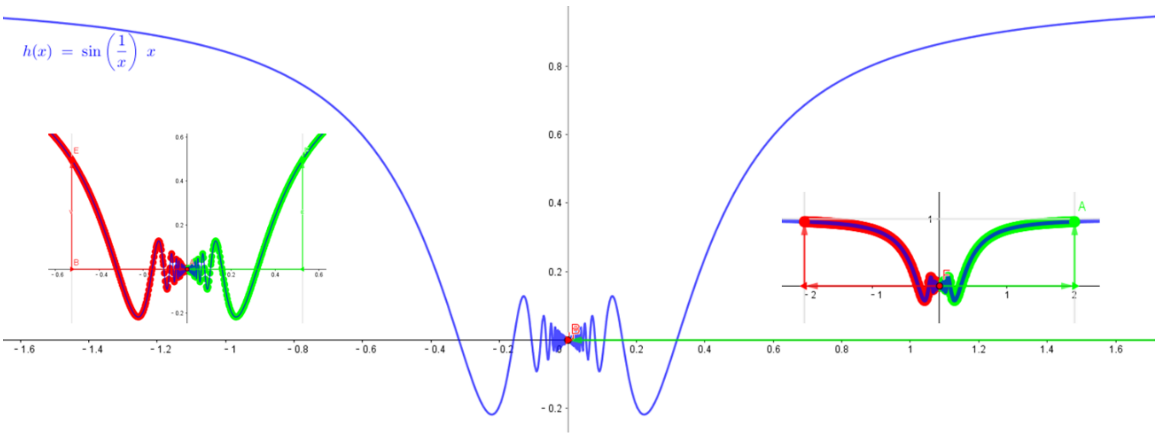








**第二组：**①$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ =?②$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}$ =?③$\lim\limits_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ =?④$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\frac{1}{x}$ =?




## 1.4.3函数的极限基本练习（技能训练）

### 一、多项式的极限

① $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+2)$　　②$\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3x+5)$　　③$\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-2}{2x^2+x-1}$

答案：0；3；$\frac{2}{9}$

## 二、有理函数的极限

**类型一、"$\frac{\infty}{\infty}$"型，有理函数$\mathbf{x \to x_0}$**

$$\lim_{x\to x_0}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}\frac{P(x_0)}{Q(x_0)}, Q(x)\neq 0\\ \text{先化简}, Q(x)=0\end{cases}$$

**①分母是0的，要化简成不为0.**

**② 常用的化简技巧：约分、分母有理化等；重要极限；洛必达法则等**

**③注意x的趋向，区别有理函数x→ +∞。**

**【强化练习】**

1. $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{x^2-7x+12}{x^2-5x+4}=$
2. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2}{2x^2+x-1}=$
3. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{4x^2+5}{x-2}=$
4. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}=$
5. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-3x}{x-3}=$

**【初级练习】**

1. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4x^2-3x+2}{3x^2-2}=$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{4x^3-3x+2}{3x^2-2}=$
3. $\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{x+2}{3x^2-2}=$
4. $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{x^2-4}{x-2}=$
5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+3x}{2x^4+x^3+x}=$
7. $\lim\limits_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=$
8. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h}=$
9. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{6\Delta x+(\Delta x)^2}{\Delta x}=$
10. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(2+\Delta x)^2-4}{\Delta x}=$
11. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^2-x^2}{\Delta x}=$
12. $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^3-x^3}{\Delta x}=$

*注意:7、8、11、12中函数的自变量.*

答案：略

**【高阶练习】**

1. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x-4}{\sqrt{x+5}-3}$

**解：把$x=4$代入分母$=0$，考虑原函数化简，可以用分母有理化的方法**

$$原式=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(\sqrt{x+5}-3)(\sqrt{x+5}+3)}=\lim_{x\to4}\frac{(x-4)(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)}=\lim_{x\to4}(\sqrt{x+5}+3)=6$$

2. $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$

**解：把$x=1$代入分母$=0$，考虑原函数化简，可以先通分、重新组合、分解因式、再约分的方法**

$$原式=\lim_{x\to1}\left(\frac{3}{1-x^3}-\frac{1+x+x^2}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to1}\frac{2-x-x^2}{1-x^3}=\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x^3-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2+x+1)}$$

$$\lim_{x\to1}\frac{x+2}{x^2+x+1}=1$$

方法积累：____________________________________________________________________________________________.

## 三、简单函数和复合函数的极限

**【拓展练习】**

**1.复合函数的极限运算法则**

1. $\lim\limits_{x\to a}\arcsin(\log_a x)\ (a>0,a\neq1)$

**解：** *a是函数$\arcsin(\log_a x)$定义域内的点，直接代数*

$$原式=\arcsin(\log_a a)=\arcsin1=\frac{\pi}{2}$$

**2.简单函数的极限运算法则**

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$

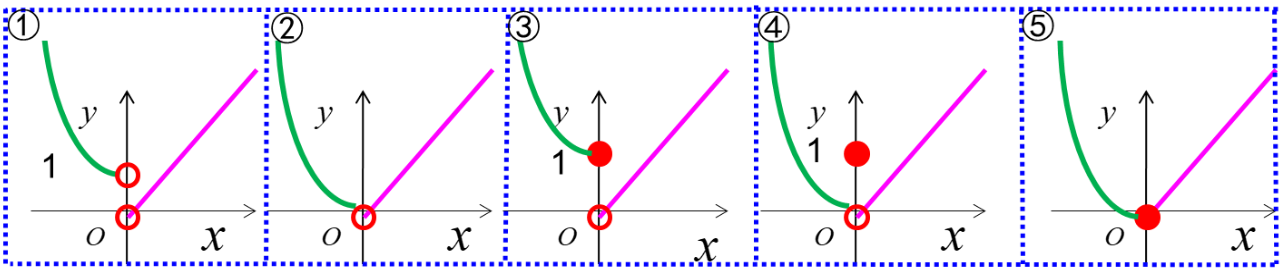
**解：把$x=0$代入分母$=0$，考虑原函数化简，可以用分子有理化的方法**

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}-1)}=\lim_{x\to0}\frac{x}{x(\sqrt{x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{1}{2}$$

方法积累：____________________________________________________________________________________________.

**【作业】**

**1.** 在x=0处，**从以下角度探究与分析**五个函数：




①有无定义？

__________________________________________________________________________________.

②极限存在吗？

__________________________________________________________________________________.

③极限存在的极限值是否等于函数值？

__________________________________________________________________________________.

④满足这三个条件的是哪个函数？

__________________________________________________________________________________.

**2.深度思考与预习**

**1.总结：** 极限存在的图像有什么特征？函数在某点有定义的如何看图像？函数值和极限值相等的时候，图像有什么特征？

**2.预习：** 列出函数在某一点连续的充要条件，画出思维导图。思考函数在不连续的类型有哪些？