Distribuciones discretas. Distribución binomial.

Idea intuitiva de variable aleatoria.

Denominamos variable aleatoria a toda función que asocia a cada elemento del espacio muestral de un experimento aleatorio un número real.

 # Ejemplo.- Si efectuamos el experimento de lanzar dos monedas y observar lo que aparece en su cara superior, si denominamos C = "salir cara" y X = "salir cruz", podremos asociar al experimento el espacio muestral

$$E=\{(C,C),(C,X),(X,C),(X,X)\}$$

Que podemos asociarle una variable aleatoria X = "número de caras", obteniendo un nuevo espacio muestral

$$E_X=\{0\,,\,1\,,\,2\}$$

- Una **variable aleatoria es discreta** cuando solo puede tomar valores enteros.
- Una **variable aleatoria es continua** cuando puede tomar cualquier valor de un intervalo real

Función de probabilidad

Se denomina función de probabilidad de una variable aleatoria discreta X a la aplicación que asocia a dada valor x_i de la variable X su probabilidad $p_i=P_x(X=i)$

 # Ejemplo.- Si consideramos el experimento del lanzamiento de un dado y asociamos la variable aleatoria X = "resultado obtenido en la cara superior", si suponemos que el dado esta equilibrado, la función de probabilidad para cada valor de $X=\{1, 2, 3, 4, 5{,}6\}$ *se cumplirá*

$$p_i=P_X(X=i)=\frac{i}{6};\ i\in\{1, 2, 3, 4{,}5, 6\}$$

Media y varianza de una variable aleatoria discreta

Si $X=\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ es una variable aleatoria discreta, cuyas probabilidades asociadas son $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, denominamos

Media o esperanza matemática: $\mu=\sum_{i=1}^{n} x_i\,.\,p_i=x_1\,.\,p_1+x_2\,.\,p_2+\ldots+x_n\,.\,p_n$

Varianza: $\sigma^2=\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\,.\,p_i=\sum_{i=1}^{n} x_i^2\,.\,p_i-\mu^2=x_1^2\,.\,p_1+x_2^2\,.\,p_2+\ldots+x_n^2\,.\,p_n-\mu^2$

La raíz cuadrada de la varianza, la denominamos desviación típica σ .

 # Ejemplo.- Si consideramos el experimento del lanzamiento de un dado y asociamos la variable aleatoria X = "resultado obtenido en la cara superior", si suponemos que el dado esta equilibrado, la función de probabilidad para cada valor de $X=\{1, 2, 3, 4, 5{,}6\}$ *se cumplirá*

$$\mu = 1\cdot\frac{1}{6} + 2\cdot\frac{2}{6} + 3\cdot\frac{2}{6} + 4\cdot\frac{2}{6} + 5\cdot\frac{2}{6} + 6\cdot\frac{2}{6} = \frac{21}{6}$$

$$\sigma^2 = 1^2\cdot\frac{1}{6} + 2^2\cdot\frac{2}{6} + 3^2\cdot\frac{2}{6} + 4^2\cdot\frac{2}{6} + 5^2\cdot\frac{2}{6} + 6^2\cdot\frac{2}{6} - \left(\frac{21}{6}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{441}{36} = \frac{35}{12}$$

Distribución binomial o de Bernoulli

Un experimento aleatorio o espacio de probabilidad se dice de **Bernoulli** si la población Ω solo posee dos resultados o sucesos elementales posibles $\{E, F\}$ (*cuyos suceso solemos llamar éxito o fracaso*).

Las probabilidades de ambos sucesos se denotan por p y q, respectivamente y obviamente satisfacen que $0 \leq p$, $q \leq 1$ y $p + q = 1$.

 # Ejemplos de experimentos de Bernoulli.-

- *El lanzamiento de una moneda. Cuyos sucesos elementales son cara y cruz.*
- *El control de calidad de fabricación de un producto. Cuyos sucesos elementales son aceptables y defectuosos.*

Asociado al experimento de Bernoulli, podemos definir una variable aleatoria $X = \{0, 1\}$, asociando el 0 al fracaso y 1 al éxito. Además, las probabilidades respectivas serán

$$p_0 = q \qquad \text{y} \qquad p_1 = p$$

Sin embargo, a menudo, nos interesa conocer el número k de éxitos al realizar un experimento compuesto por n experimentos de Bernoulli, sin tener en cuenta el orden en el que aparecen dichos éxitos o fracasos. Y teniendo en cuenta, que el espacio muestral para un experimento de Bernoulli consta de dos sucesos elementales $\{E, F\}$, con probabilidades p y q para E y F respectivamente, y que dichos ensayos son independientes y para cualquier suceso en el que aparezcan k éxitos, existen $\binom{n}{k}$ formas posibles en las que pueden aparecer. Si denominamos en dicho experimento la variable aleatoria:

X = El número de **éxitos** que aparecen en n experimentos.

Se cumplirá

$$p_k = P_X(X = k) = \binom{n}{k}\cdot p^k\cdot q^{n-k}$$

La variable X obtenida decimos que se distribuye según una **Binomial de parámetros n y p** *y* representamos por $B(n, p)$.

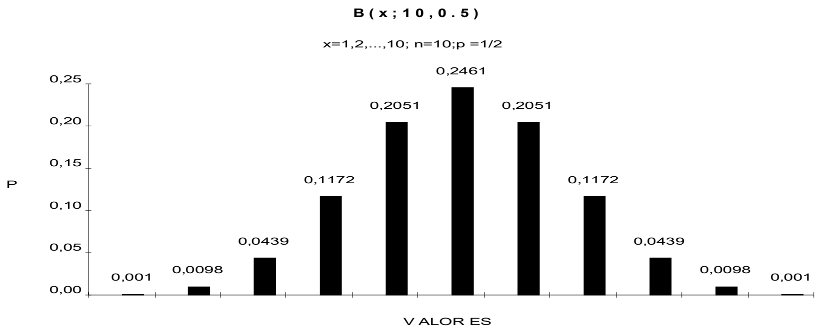
 # Ejemplo.- Si se sabe que la probabilidad de nacer varón es $p = 0{,}4$ *, El número de varones nacidos en una familia de 8 hijos es una distribución binomial* $B(8, ;\ 0{,}4)$.

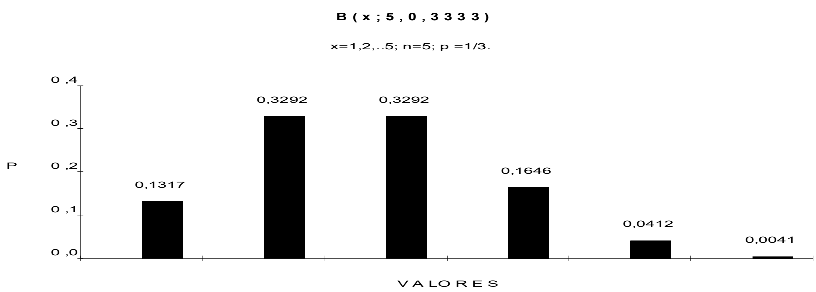
Función de probabilidad

Si X es una variable aleatoria que se distribuye según una distribución B(n,p), entonces para cada X = k, su probabilidad vendrá dada por

$$p_k = P_X(X=k) = \binom{n}{k} . p^k . q^{n-k}$$

Ejemplo.- La representación gráfica de las probabilidades de una variable aleatoria $B\left(10, \frac{1}{2}\right)$ y $B\left(5, \frac{1}{3}\right)$ será





Media y varianza de la distribución binomial

A partir de una distribución de Bernoulli de parámetro p ($q = 1 - p$, es decir $B(1, p)$, podemos calcular su media y su varianza

$$\mu = 1 . p + 0 . q = p$$

$$\sigma^2 = 1^2 . p + 0^2 . q - p^2 = p .(1-p) = p . q$$

Podemos calcular la media y varianza de una variable aleatoria binomial $B(n, p)$, teniendo en cuenta que consiste en n pruebas repetidas de la la distribución $B(1, p)$, por lo que únicamente tendremos que multiplicar por n los resultados anteriores, es decir

$$\mu = n . p$$

$$\sigma^2 = n . p . q$$

La desviación típica será $\sigma = \sqrt{n . p . q}$

Ejemplo.- En un grupo de 10 alumnos de un centro educativo se ha comprobado que cada uno de ellos falta a clase el 5% de los días. Calcular la probabilidad de que un día determina do: a) no se registre ninguna ausencia; b) falten a clase más de 5 alumnos; c) no asista a clase ningún alumno.

Si X es la variable aleatoria que expresa el número de alumnos que faltan a clase, X se distribuirá según una $B(10\,;\,0{,}05)$, y por tanto se cumplirá:

a) $p_0=\binom{10}{0}.\,0{,}95^{10}=0{,}599$

b) $P_X(X>5)=p_6+p_7+p_8+p_9+p_{10}=$
$=\binom{10}{6}.\,0{,}05^6 0{,}95^4+\binom{10}{7}.\,0{,}05^7 0{,}95^3+\binom{10}{8}.\,0{,}05^8 0{,}95^2+\binom{10}{9}.\,0{,}05^9 0{,}95^1+\binom{10}{10}.\,0{,}05^{10}=$
$=2{,}75\,.10^{-6}$

c) $p_{10}=\binom{10}{10}.\,0{,}05^{10}=9{,}8\,.\,10^{-14}$