Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg)
Wahlteil – Analytische Geometrie – Aufgabe II, 1

Gegeben sind eine Pyramide ABCDS mit den Punkten A(0/0/0), B(8/0/0), C(8/8/0), D(0/8/0), S(4/4/8) sowie für jedes $r \in \mathbb{R}$ eine Ebene $E_r : r \cdot x_1 + 3x_3 = 8 \cdot r$.

a) Stellen Sie die Pyramide in einem Koordinatensystem dar.
Die Ebene E_2 enthält die Pyramidenkante [BC] und schneidet die Kante [DS] in F und die Kante [AS] in G. Geben Sie die Koordinaten der Punkte F und G an.
Zeichnen Sie das Viereck BCFG ein.
Zeigen Sie, dass das Viereck ein gleichschenkliges Trapez ist.
Wie groß sind die Innenwinkel dieses Trapezes? (7 VP)

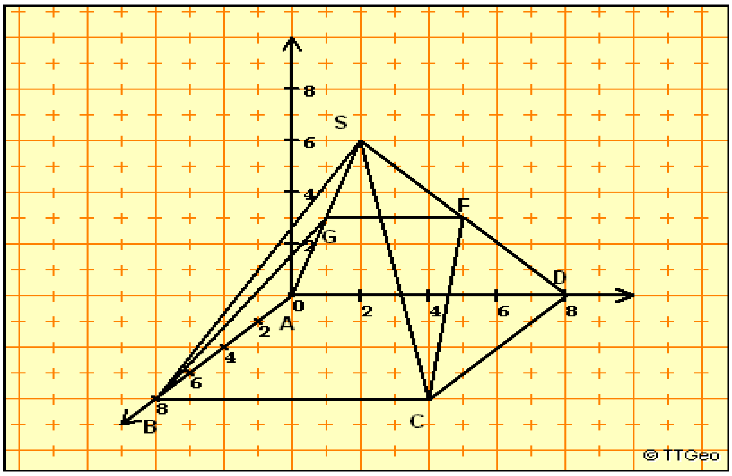
b) Bestimmen Sie r* so, dass die Pyramidenspitze S von der Ebene E_{r^*} den Abstand 4 hat. Geben Sie die Koordinaten desjenigen Punktes in dieser Ebene E_{r^*} an, der von S den Abstand 4 hat. (4 VP)

c) Weisen Sie nach, dass die Gerade durch B und C in jeder Ebene E_r liegt.
Beim Schnitt der Ebene E_r mit der Pyramide entsteht eine Schnittfigur.
Welche Schnittfiguren sind möglich? Geben Sie die jeweiligen Werte von r an.

(5 VP)

Abiturprüfung Mathematik 2005 (Baden-Württemberg)
Wahlteil – Analytische Geometrie – Lösung Aufgabe II, 1

a)



Schnittpunkte F und G:
Ebene $E_2: \ 2x_1 + 3x_3 = 16$
Berechnung des Schnittpunktes F:

Geradengleichung durch D und S: $g_{DS}: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Schnitt von E_2 mit g_{DS}: $2 \cdot 4t + 3 \cdot 8t = 16 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$
Daraus ergibt sich als Schnittpunkt F(2/6/4).

Berechnung des Schnittpunktes G:

Geradengleichung durch A und S: $g_{AS} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

Schnitt von E_2 mit g_{AS}: $2 \cdot 4t + 3 \cdot 8t = 16 \Rightarrow t = \frac{1}{2}$
Daraus ergibt sich als Schnittpunkt G(2/2/4).

Gleichschenkliges Trapez:
Das Viereck BCFG ist ein Trapez, wenn die gegenüberliegenden Seiten [BC] und [FG] parallel sind.

Die Vektoren $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\overrightarrow{GF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind Vielfache zueinander und somit parallel.

Also ist das Viereck BCFG ein Trapez.

Es gilt $\left|\overrightarrow{BG}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}$ und $\left|\overrightarrow{CF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{36+4+16} = \sqrt{56}$

Da die beiden Seiten gleich groß sind, ist das Trapez gleichschenklig.

Innenwinkel des Trapez:

Winkel bei B: $\cos\alpha = \frac{\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BG}}{\left|\overrightarrow{BC}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BG}\right|} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}\right|\cdot\left|\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right|} = \frac{16}{\sqrt{64}\cdot\sqrt{36+4+16}} \Rightarrow \alpha = 74{,}5°$

Aufgrund der Gleichschenkligkeit ist der Winkel im Punkt C genau so groß.

Die jetzt noch unbekannten Winkel in F und G sind ebenfalls gleich groß.

Mit der Winkelsumme im Trapez gilt: $2\cdot 74{,}5 + 2\cdot\beta = 360° \Rightarrow \beta = 105{,}5°$
Also sind die Winkel im Punkt F und G jeweils 105,5° groß.

b) Bestimmung von r*:

Aufstellen der Hesse'schen Normalform von E_r : $\frac{r\cdot x_1 + 3\cdot x_3 - 8r}{\sqrt{r^2+9}} = 0$

Abstand S von E_r : $\left|\frac{4\cdot r + 24 - 8\cdot r}{\sqrt{r^2+9}}\right| = 4 \Rightarrow \left|\frac{24-4r}{\sqrt{r^2+9}}\right| = 4$

1.Fall: $\frac{24-4r}{\sqrt{r^2+9}} = 4 \Rightarrow 6 - r = \sqrt{r^2+9} \Rightarrow 36 - 12r + r^2 = r^2 + 9 \Rightarrow 12r = 27 \Rightarrow r = \frac{9}{4}$

Bei Wurzelgleichungen muss immer eine Probe durchgeführt werden. Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung ergibt, dass dies tatsächlich eine Lösung ist.

2.Fall: $\frac{24-4r}{\sqrt{r^2+9}} = -4 \Rightarrow -6 + r = \sqrt{r^2+9} \Rightarrow r^2 - 12r + 36 = r^2 + 9 \Rightarrow 12r = 27 \Rightarrow r = \frac{9}{4}$

Einsetzen der Lösung in die Ausgangsgleichung ergibt eine falsche Aussage.
Also gibt es aus dem 2.Fall keine weitere Lösung.

Es gilt also r* = $\frac{9}{4}$ (aus dem 1.Fall) und somit ist die gesuchte Ebene

$E_{\frac{9}{4}} : \frac{9}{4}x_1 + 3x_3 = 18$

Bestimmung des Punktes P in der Ebene:

Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt P der Lotgeraden h durch S(4/4/8) orthogonal zur Ebene.

$$h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{9}{4} \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ mit } t \in \mathbb{R}$$

Schnittpunkt von h mit

$$E_{\frac{9}{4}}: \frac{9}{4}(4 + \frac{9}{4}t) + 3(8 + 3t) = 18 \Rightarrow 9 + \frac{81}{16}t + 24 + 9t = 18 \Rightarrow t = -\frac{16}{15}$$

Daraus ergibt sich der Schnittpunkt $P(\frac{8}{5} / 4 / \frac{24}{5})$

c) Gerade liegt in jeder Ebene:

Geradengleichung durch B und C: $g_{BC}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix}$

Schnitt von E_r und g_{BC}: $r \cdot 8 + 3 \cdot 0 = 8 \cdot r$ dies ist eine wahre Aussage für jedes $r \in \mathbb{R}$, also liegt die Gerade g_{BC} in jeder Ebene der Schar E_r.

Schnittfiguren:
Die Ebenenschar enthält, egal wie r gewählt wird, immer die Punkte B und C.
Die Ebenenschar dreht sich somit um diese "Achse“ [BC].
Enthält die Ebenenschar den Punkt A(0/0/0) (dies ist für r = 0 der Fall) stimmt die Ebene mit der Grundfläche der Pyramide überein, also Schnitt in einem Quadrat.
Enthält die Ebenenschar den Punkt S(4/4/8), liegt die Dreiecksoberfläche BCS auf der Ebene, also Schnitt in einem Dreieck.
S(4/4/8) liegt für folgendes r auf der Ebene: $r \cdot 4 + 3 \cdot 8 = 8 \cdot r \Rightarrow r = 6$
Für alle 0 < r < 6 liegt die Ebene innerhalb der Pyramide und die Schnittfigur ist ein gleichschenkliges Trapez.
Für r < 0 oder r > 6 hat die Ebene mit der Pyramide nur die Grundkante [BC] gemeinsam.