

Gemeinsame Abituraufgabenpools der Länder

Aufgabensammlung

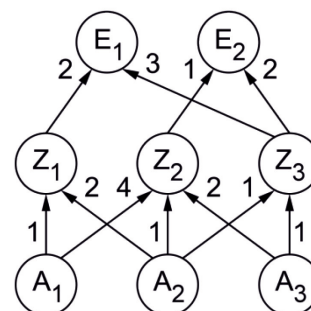
Aufgabe für das Fach Mathematik

Kurzbeschreibung

Anforderungsniveau	Prüfungsteil	Sachgebiet	digitales Hilfsmittel
grundlegend	B	Lineare Algebra	WTR

1 Aufgabe

Ein Industriebetrieb fertigt gemäß dem abgebildeten Verflechtungsgraphen aus den Ausgangsprodukten A_1 , A_2 und A_3 zunächst die Zwischenprodukte Z_1 , Z_2 sowie Z_3 und daraus anschließend die beiden Endprodukte E_1 sowie E_2 .



1 Stückzahlen der Ausgangsprodukte, der Zwischenprodukte und der Endprodukte sollen jeweils durch einen Spaltenvektor dargestellt werden. Die Verflechtungsmatrix AZ gibt zu jedem Zwischenprodukt die Stückzahlen der für ein Stück erforderlichen Ausgangsprodukte an, die Verflechtungsmatrix ZE entsprechend zu jedem Endprodukt die Stückzahlen der erforderlichen Zwischenprodukte.

a Geben Sie AZ und ZE an.

b Dem Industriebetrieb liegt eine Bestellung von 500 E_1 und 400 E_2 vor. Berechnen Sie die Stückzahlen der dafür erforderlichen Ausgangsprodukte.

c Den folgenden Tabellen können für die Ausgangsprodukte und die Zwischenprodukte die dem Betrieb entstehenden Anschaffungskosten bzw. Fertigungskosten pro Stück entnommen werden:

	A_1	A_2	A_3		Z_1	Z_2	Z_3
Anschaffungskosten	2 €	1 €	3 €	Fertigungskosten	3,5 €	5 €	2 €

BE

2

4

4

Die Kosten für die Fertigung eines Endprodukts E_1 aus den Zwischenprodukten betragen sieben Euro. Ermitteln Sie die Kosten, die dem Betrieb für die Herstellung eines Endprodukts E_1 für Anschaffung und Fertigung insgesamt entstehen.

d Der Betrieb hat 46 Z_1 , 64 Z_2 und 81 Z_3 auf Lager. Bestimmen Sie, wie viele Endprodukte E_1 sich daraus höchstens fertigen lassen. 2

e Beschreiben Sie für jede der Matrizen AZ und ZE , wie die Anzahl der Zeilen und die Anzahl der Spalten verändert werden müssen, wenn aus den Ausgangsprodukten ein weiteres Zwischenprodukt Z_4 gefertigt wird, das für die Herstellung der Endprodukte verwendet wird. 2

2 Unter geänderten Produktionsbedingungen gibt die Verflechtungsmatrix $AE = \begin{pmatrix} 2 & a \\ 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

zu jedem der Endprodukte E_1 und E_2 die Stückzahlen der für ein Stück erforderlichen Ausgangsprodukte A_1 , A_2 und A_3 an.

a Beschreiben Sie die Bedeutung der Werte der ersten Spalte sowie der Werte der zweiten Zeile von AE im Sachzusammenhang. 2

b Untersuchen Sie, ob es für den Parameter a einen Wert gibt, für den ein Lagerbestand von 750 A_1 , 3400 A_2 und 2000 A_3 vollständig aufgebraucht wird und die Stückzahlen der daraus gefertigten Endprodukte E_1 und E_2 im Verhältnis 2:1 stehen. 4

20

2 Erwartungshorizont

Der Erwartungshorizont stellt für jede Teilaufgabe dar, in welchem Umfang und in welcher Form eine Lösung erwartet wird; nicht alle Lösungen sind dazu vollständig ausgeführt. Nicht dargestellte korrekte Lösungen sind als gleichwertig zu akzeptieren.

		BE
1 a	$AZ = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, ZE = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$	2
b	$AZ \cdot ZE \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 500 \\ 400 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2600 \\ 4700 \\ 3100 \end{pmatrix}$	4
c	$\begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3,50 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + 7 = 40$ <p>Die Herstellungskosten betragen insgesamt 40 Euro.</p>	4

	d	Zur Fertigung eines E_1 sind zwei Z_1 und drei Z_3 erforderlich. 46 Z_1 werden damit für 23 E_1 benötigt, 81 Z_3 für 27 E_1 . Es lassen sich also höchstens 23 E_1 fertigen.	2
	e	In der Matrix AZ muss eine vierte Spalte ergänzt werden, in der Matrix ZE eine vierte Zeile.	2
2	a	Die Werte in der ersten Spalte geben für ein E_1 die Stückzahlen der dafür erforderlichen Ausgangsprodukte an. Die Werte in der zweiten Zeile geben für ein E_1 und ein E_2 an, wie viele A_2 dafür jeweils erforderlich sind.	2
	b	<p>Das aus $\begin{pmatrix} 2 & a \\ 7 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2x \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 750 \\ 3400 \\ 2000 \end{pmatrix}$ resultierende Gleichungssystem</p> <p>I $4x + ax = 750$ II $17x = 3400$ III $10x = 2000$</p> <p>liefert $a = -0,25$. Ein negativer Wert von a ist im Sachzusammenhang nicht sinnvoll. Es gibt also keinen Wert von a, der den beschriebenen Forderungen gerecht wird.</p>	4
			20

3 Standardbezug

Teilaufg.	BE	Leitideen					allgemeine mathematische Kompetenzen ¹						Anforderungsbereich		
		L1	L2	L3	L4	L5	K1	K2	K3	K4	K5	K6	I	II	III
1 a	2	X								I			X		
b	4	X								I		I	X		
c	4	X						II	II			I		X	
d	2	X					II					II		X	
e	2	X								II				X	
2 a	2	X							II					X	
b	4	X						III	III			II			X

4 Bewertungshinweise

Die Bewertung der erbrachten Prüfungsleistungen hat sich für jede Teilaufgabe nach der am rechten Rand der Aufgabenstellung angegebenen Anzahl maximal erreichbarer Bewertungseinheiten (BE) zu richten.

Für die Bewertung der Gesamtleistung eines Prüflings ist passend zur Konzeption der Aufgaben der Aufgabensammlung und des Abituraufgabenpools ein Bewertungsschlüssel² vor-

¹ Für jede Kompetenz, die bei der Bearbeitung der Teilaufgabe eine wesentliche Rolle spielt, ist der Anforderungsbereich (I, II oder III) eingetragen, in dem die Kompetenz benötigt wird.

gesehen, der angibt, wie die in den Prüfungsteilen A und B insgesamt erreichten Bewertungseinheiten in Notenpunkte umgesetzt werden.

² Der Bewertungsschlüssel ist Teil des Dokuments „Beschreibung der Struktur“, das auf den Internetseiten des IQB zum Download bereitsteht.