Plan de lecţie - Maxim Bogdan

(1) **Propunător:** Maxim Bogdan
(2) **Şcoala: Liceul Teoretic Nicolae Iorga, Botoşani**
(3) **Clasa:** a IX-a
(4) **Data:** 8 aprilie 2017
(5) **Disciplina:** Matematică
(6) **Unitatea de învăţare:** Interpretarea geometrică a proprietăţilor algebrice ale funcţiei de gradul al II-lea
(7) **Subiectul lecţiei:** Aplicaţii ale funcţiei de gradul al II-lea.
(8) **Lecţia predată ora precedentă:** Poziţionarea parabolei faţă de axa Ox. Semnul funcţiei de gradul II. Inecuaţii.
(9) **Tipul lecţiei:** Mixtă, Însuşirea de noi cunoştinţe
(10) **Locul de desfăşurare:** Sala de clasă
(11) **Durata lecţiei:** 50 de minute

Obiectivul central al lecţiei: Consolidarea cunoştinţelor dobândite în acest capitol, şi lărgirea viziunii cu privire la aplicabilitatea şi importanţa lucrurilor ce se învaţă la ora de matematică.

Competenţe generale:

(1) Identificarea unor date şi relaţii matematice şi corelarea lor în funcţie de contextul în care au fost definite.
(2) Prelucrarea datelor de tip cantitativ, calitativ, structural, contextual cuprinse î n enunţuri matematice.
(3) Utilizarea algoritmilor şi a conceptelor matematice pentru caracterizarea locală sau globală a unei situaţii concrete.
(4) Exprimarea caracteristicilor matematice cantitative sau calitative ale unei situaţii concrete şi a algoritmilor de prelucrare a acestora.
(5) Analiza şi interpretarea caracteristicilor matematice ale unei situaţii problemă.
(6) Modelarea matematică a unor contexte matematice variate, prin integrarea cunoştinţelor din diferite domenii.
(7) Dezvoltarea interesului şi motivaţiei pentru studiul şi aplicarea matematicii în contexte variate.

Competenţe specifice:

(1) Aplicarea regulilor de calcul algebric cu numere reale.
(2) Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operaţiilor cu numere reale şi a ordinii efectuării operaţiilor.
(3) Aplicarea matematicii în viaţa contemporană.
(4) Stimularea spiritului inventiv, a atitudinii de a extrapola rezultatele, a formula şi valida generalizările, a descoperi şi a pune probleme.

Obiective operaţionale:

I *Cognitive*
- (a) să folosească formula discriminantului, a rădăcinilor şi a coordonatelor vârfului parabolei;
- (b) să rezolve şi să interpreteze geometric ecuaţii şi inecuaţii de gradul II;
- (c) să aplice algoritmul de rezolvare al sistemelor de două ecuaţii ce conţin termeni de grad cel mult 2;
- (d) să utilizeze culisa (sliderul) în Geogebra

II *Afective*
- (a) dezvoltarea dorinţei de a cunoaşte cât mai bine ecuaţia de gradul al II-lea;
- (b) Participarea activă la lecţie;
- (c) Dezvoltarea interesului pentru studiul matematicii;
- (d) Reacţionarea pozitivă, dorind să lucreze şi să fie apreciaţi;
- (e) Manifestarea spiritului de competiţie, ordine şi disciplină;
- (f) Manifestarea dorinţei de a învăţa lucruri noi;
- (g) Dezvoltarea simţului estetic şi critic;

III *Psiho-motorii*
- (a) Aşezarea corectă în pagină;
- (b) Scrierea lizibilă pe caiete şi pe tablă;
- (c) Utilizarea corectă a mijloacelor auxiliare folosite.

Metode didactice: conversaţia (euristică şi examinatoare), explicaţia, problematizarea, modelarea, fişa de lucru.

Resurse materiale: videoproiector, laptop, aplicaţia Geogebra, telefoane performante, caiete de notiţe, manualul, tabla, fişa de lucru.

Bibliografie

[1] Lo Bello Anthony, *Origins of Mathematical Words*, Johns Hopkins University Press, 2013.
[2] Larson Ron, *Precalculus - Real Mathematics, real people*, 6-th edition, Brooks-Cole, 2011.
[3] Năstăsescu Constantin, *Matematică. Manual pentru clasa a IX-a - Algebră*, Editura Didactică şi Pedagogică, 1988.

Alte resurse: Internet (Wikipedia, Cut-the-knot)

$\boxed{1}$ **Organizarea clasei pentru lecţie: 3 minute**

În aceste câteva momente cât durează pregătirea orei, profesorul transmite starea sa de dispoziţie elevilor (acum le poate zâmbi, spune o glumiţă, etc.), dar şi reciproc. De asemenea, strigarea catalogului este o acţiune foarte frumoasă, întrucât profesorul intră în contact (verbal, vizual) cu fiecare elev în parte şi fiecare elev în parte primeşte atenţie din partea profesorului. Tot în acest răstimp elevii se adună şi se pregătesc sufleteşte de începerea orei, luându-şi doza de răbdare necesară şi pregătindu-şi "sertăraşele" în care se află informaţiile de natură matematică umplute în timpul petrecut la şcoală până atunci.

$\boxed{2}$ **Verificarea şi aprecierea cunoştinţelor şi capacităţilor elevilor: 10 minute**

În această etapă profesorul verifică temele elevilor (prin sondaj de exemplu), poate rezolva la tablă problemele mai grele din temă pe care elevii nu le-au putut găsi soluţii. Eventual se pot reactualiza unele cunoştinţe.

$\boxed{3}$ **Transmiterea noilor cunoştinţe : 30 de minute**

a) Captarea atenţiei (Se va alege **doar unul** dintre subiectele prezentate mai jos...toate sunt interesante)

Notă Etimologică: Cuvântul *parabolă* provine din substantivul greacesc $\pi\alpha\rho\alpha\beta o\lambda\acute{\eta}$ şi înseamnă *o aruncare* ($\beta o\lambda\acute{\eta}$) *de-a lungul sau după* ($\pi\alpha\rho\acute{\alpha}$).

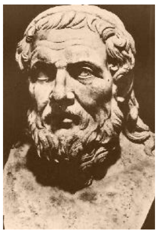
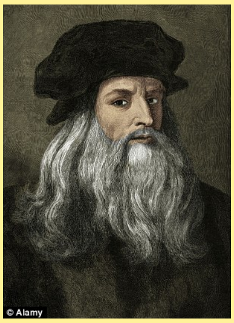
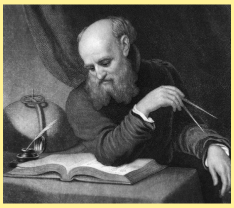


Figure 1. Apollonius din Perga

Cine, când, cum şi în ce context a descoperit parabola?

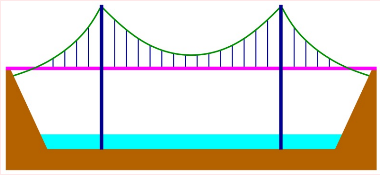
• Apare menţionată de matematicianul şi astronomul grec din antichitate *Apollonius din Perga* (sec. III î.Hr) care i-a şi atribuit acest nume, în tratatul său intitulat *Conice*. El dorea să focalizeze razele solare cu ajutorul unei oglinzi curbe, şi a descoperit că parabola are această proprietate optică.
• *Leonardo da Vinci*(1452-1519) a observat, iar *Galileo Galilei* (1564-1642) a arătat că orice corp ce se află în cădere sub acţiunea propriei sale greutăţi descrie o traiectorie de parabolă.



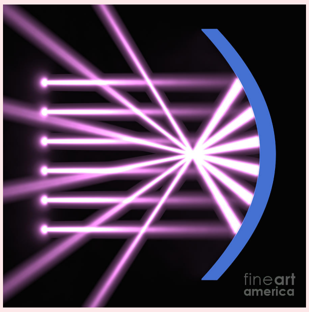


1: La ce foloseşte cunoaşterea parabolei şi unde apare ea?

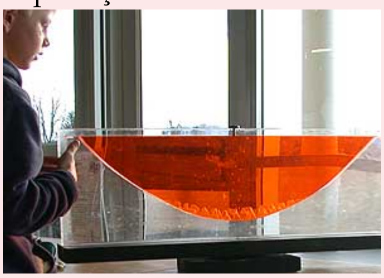
♣ În viaţa de zi cu zi: Putem face, fără cheltuieli majore sau prea mari bătăi de cap un **aragaz solar**.

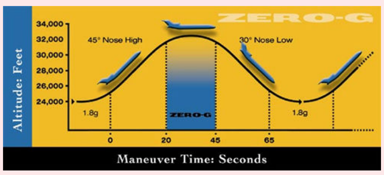


♣ În Construcţii , Arhitectură şi Tehnică: Podurile suspendate funcţionează optim atunci când cablurile sunt aşezate în forma unei parabole. Tunelele se sapă tot în această formă. Trenuleţele de la Disneyland merg pe circuite parabolice. Există edificii în formă de parabolă (în special bisericile din occident cu stilul gotic). Artificiile urmează traiectorii parabolice. Reflectoarele, lanternele, antenele radio şi de televiziune, farurile, reşourile au aceeaşi formă. Străzile sunt mai înalte la mijloc şi mai lăsate în laterale, pentru a se putea scurge uşor apa, ceea ce arată că au formă de parabolă (mai aplatizată). Tehnica militară, prin balistică în special, folosesc cunoştinţele despre parabolă pentru a lansa în mod exact o rachetă, o bombă, un glonţ, etc. Decolarea şi aterizarea avionului sunt definite de o parabolă.

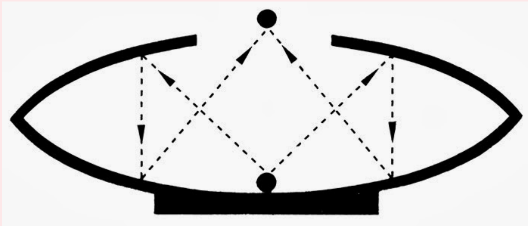


♣ În Natură: Curcubeul ni se arată în forma unui arc de parabolă. Umbra unui corp rotund poate avea formă de parabolă. Tunelele ce se formează la topirea gheţii. Tot ce înseamnă gheizere, sau în oraşe fântâni arteziene, ne oferă o imagine a parabolei în toată splendoarea şi dinamismul. Urmele ce apar în urma bărcilor pe apă sunt şi ele parabole. Dacă învârtim apă într-un pahar se formează la suprafaţă o adâncitură în lichid ce are forma exactă a unei parabole.

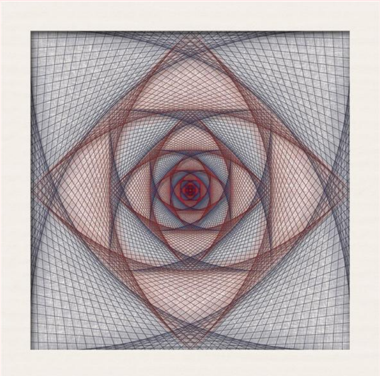
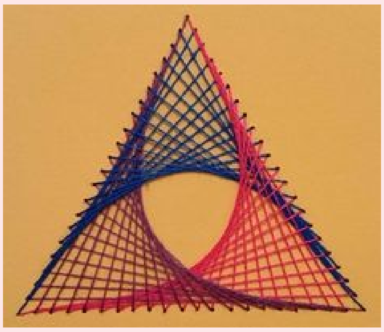
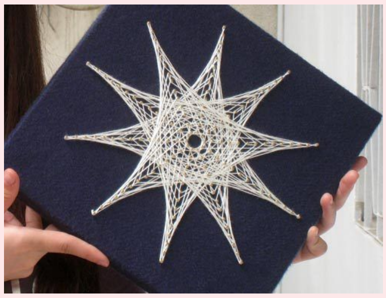




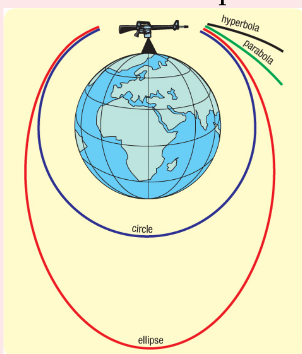
♣ Pentru Amuzament: Există o iluzie optică în care un obiect se vede clar că pluteşte în aer, dar totul este doar o reflexie, căci el se află cu câţiva centimetri mai jos.


♣ În Astronomie: Se folosesc oglinzi parabolice la construirea telescoapelor. Totodată traiectoriile sateliţilor la părăsirea câmpului gravitaţional al Pământului, capătă o traiectorie parabolică, ce are focarul în centrul Pământului. Totodată, cometele neperiodice se mişcă pe orbite parabolice.

♣ În Artă şi Publicitate: Există un domeniu special al artei consacrat figurilor geometrice, numit *String Art* (arta firelor). Aici parabola joacă un rol central, fiind una din curbele plane care se construiesc foarte uşor. Chiar sigla celor de la McDonald's este formată din două arce de parabolă.

♣ În Sport: Jucătorii de basket, fotbal, sau orice alt sport care se joacă cu mingi, trebuie să aibă un simţ şi un control foarte bun asupra modului în care cade mingea şi unde cade aceasta. Ei practic rezolvă prin puterea simţirii o problemă de matematică-fizică.

b) Comunicarea obiectivelor

Întrucât parabola este atât de răspândită în toate domeniile de cunoaştere după cum am văzut în cele de mai sus, trebuie să aprofundăm studiul ei, pentru a ne putea şi noi bucura de înţelegerea câtorva fenomene mai deosebite, dintre care amintesc pe cea mai cunoscută: *Problema Proiectilului*, cu care ne întâlnim ori de câte ori aruncăm câte ceva. De asemenea ne interesează să putem face şi ceva practic. De aceea am ales la final să ne jucăm cu câteva modele din arta firelor (*String Art*).

c) Reactualizarea cunoştinţelor

Se menţionează de către profesor că pe parcursul lecţiei se vor folosi rezultate demonstrate anterior în cadrul capitolului.

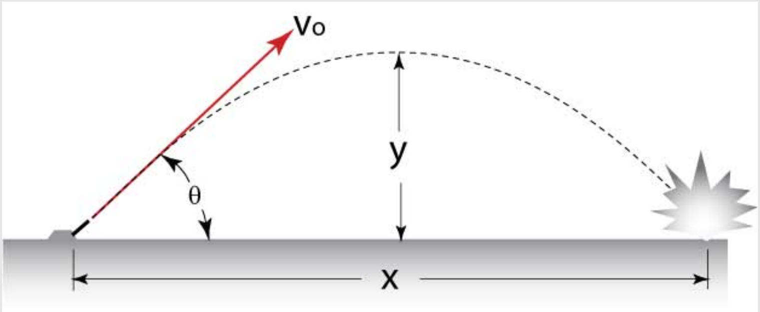
d) Dirijarea învăţării

Profesorul începe cu expunerea conceptelor/problemelor noi, însoţite de câteva exemple care vor fi elucidate cu ajutorul elevilor.

Parabola şi Problema Proiectilului

Dacă aruncăm un obiect $P(x, y)$ de la o înălţime h_0 faţă de pământ, cu o viteză iniţială în valoare egală cu v_0 şi sub un unghi $\theta \in [0, 2\pi)$ faţă de axa Ox, atunci la momentul t cunoaştem că punctul P va avea următoarele coordonate:

$$\boxed{P : \begin{cases} x = v_0 t \cos\theta \\ y = h_0 + v_0 t \sin\theta - \dfrac{1}{2} g t^2 \end{cases}}$$



1) Demonstraţi că traiectoria lui P este o parabolă de ecuaţie:

$$y = h_0 + \tan\theta \cdot x - \frac{g}{2v_0^2 \cos^2\theta} \cdot x^2.$$

2) Vârful traiectoriei (locul şi timpul în care înălţimea la care va ajunge P e maximă) va fi:

$$\begin{cases} h_{\max} = y_{\text{vârf}} = h_0 + \dfrac{v_0^2 \sin^2\theta}{2g} \\ x_{\text{vârf}} = \dfrac{v_0^2 \sin 2\theta}{2g} \\ t_{\text{vârf}} = \dfrac{v_0 \sin\theta}{g} \end{cases}.$$

3) Distanţa de la punctul de tragere până la cădere (adică locul unde ajunge P pe Ox) este dată de:

$$D = \frac{v_0 \cos\theta}{g} \left(v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh_0} \right).$$

4) Timpul de zbor al proiectilului (momentul în care P ajunge pe axa Ox) este:

$$T = \frac{1}{g} \left(v_0 \sin\theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh_0} \right).$$

5) Unghiul de tragere θ la care ar trebui lansat un proiectil pentru a ajunge la distanţa de tragere D este dat de relaţia:

$$\sin(2\theta) = \frac{g \cdot D}{v_0^2}.$$

6) Unghiul de cădere verifică:

$$\begin{cases} \cos\Theta = \dfrac{v_0 \cos\theta}{\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}} \\ \sin\Theta = -\sqrt{\dfrac{v_0^2 \sin^2\theta + 2gh_0}{v_0^2 + 2gh_0}} \end{cases}.$$

7) Mărimea vitezei lui P la un moment t este:

$$v = \sqrt{v_0^2 + g^2 t^2 - 2g v_0 t \sin\theta}.$$

Continuare de pe pagina precedentă

8) Viteza la cădere va fi:

$$V = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0}.$$

9) În cazul particular, când $h_0 = 0$ şi $\theta = 45°$ au loc formulele:

$$h_{\max} = \frac{v_0^2}{4g},\ D = \frac{v_0^2}{g},\ T = \frac{\sqrt{2}v_0}{g},\ V = v_0.$$

Enunţurile de la 1 până la 5 se demonstrează uşor folosind noţiunile cunoscute din lecţiile anterioare, iar celelalte se prezintă doar ca nişte rezultate utile. Pot fi lăsate ca temă.

e) Asigurarea feedback-ului

Se rezolvă de către elevi probleme din fişa de lucru, pentru fiecare problemă se alege un elev pentru redactarea pe tablă a acesteia sub îndrumarea profesorului şi pe parcurs profesorul va prezenta una, două probleme mai deosebite, din care avem cu toţii ce învăţa.

4 **Sistematizarea şi consolidarea cunoştinţelor: 7 minute**

Se realizează prin schematizarea rezultatelor principale întâlnite pe parcursul predării într-un tabel sau grafic, pentru a facilita reţinerea şi interiorizarea rezultatelor proaspăt prezentate. Tot acum se pot nota elevii cu o participare bună la lecţie.

5 **Tema pentru acasă**

1 Desenaţi o stea parabolică, după modelul dat. Încercaţi să creaţi şi un alt desen, ce ar putea fi utilizat în decorarea unei felicitări, de exemplu.

2 La alegere: Compuneţi o problemă care să se poată rezolva cu ajutorul problemei proiectilului (eventual folosind şi ideea de ţintă din aplicaţia Geogebra) şi rezolvaţi-o; sau din manual 2 probleme de la lecţia de zi.

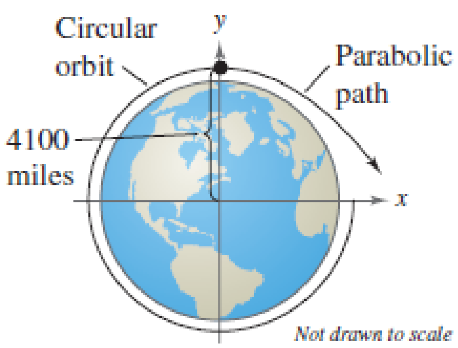
Fişă de lucru

Probleme practice

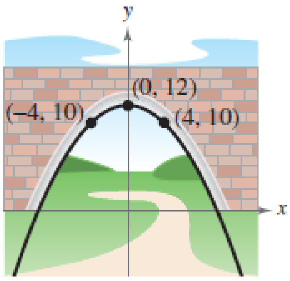
Măsurarea Clădirilor Turnurile Petronas din Kuala Lumpur au o înălţime de 1483 ft şi se află printre cele mai înalte clădiri din lume. Cât i-ar lua unei pietre să cadă liber de pe vârful clădirii până la atingerea solului?

Astronomie Un satelit orbitează în jurul Pământului la 100 de mile depărtare de sol şi are o viteză de 17.500 de mile pe oră. Când viteza lui se multiplică cu $\sqrt{2}$ atunci el are viteza minimă necesară pentru a scăpa de gravitaţia Pământului şi urmează o traiectorie parabolică ce are centrul Pământului ca focar.

(a) Determinaţi viteza iniţială la părăsirea orbitei circulare.
(b) Aflaţi ecuaţia orbitei sale, ţinând seama că raza Pământului este de 4000 de mile.



$\boxed{\textit{Arhitectura}}$ Un tunel în formă de arc de parabolă are vârful poziţionat la 12 m deasupra solului (vezi figura). Ştiind că la înălţimea de 10 m are laţimea de 8 m, aflaţi cât este de lat tunelul la nivelul pământului.



Problema Proiectilului - Explorare

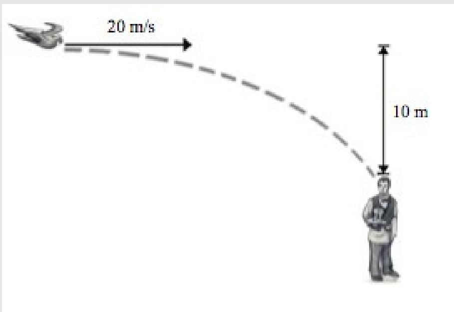
Folosindu-ne de lucrurile din prezentare încercaţi să rezolvaţi următoarele probleme:

$\boxed{1}$ (*Pasărea cu intenţii rele*) Unei păsări călătoare, ce zbura pe orizontală cu viteza constantă de $v_0 = 20$ m/s, îi trece prin minte un gând viclean ca să facă necaz unui om ce aştepta cuminte un autobuz, undeva cu 10 m sub nivelul ei.

Pentru a-l ochi, pasărea trebuie să „atace” cu ceva distanţă înainte de a ajunge deasupra capului lui.

(a) Aflaţi această distanţă.

(b) Cât timp are omul pentru a scăpa „basma-curată”?



$\boxed{2}$ Marele jucător de rugby Louie Anderson de la echipa *Packers* se pregăteşte pentru lovitura vieţii. El va executa o lovitură cu viteza iniţială de $v_0 = 20$ m/s, la un unghi $\theta = 60°$.

(a) Cât timp va sta mingea în aer?

(b) Cât de departe ajunge mingea şi care este cea mai mare înălţime la care va ajunge pe parcursul loviturii?