MOVIMIENTO EN COORDENADAS CARTESIANAS

Cinemática de la partícula

Cinemática: estudio del movimiento sin importar las causas.

Partícula: punto, modelo matemático.

Movimiento: la evolución temporal de la posición de la partícula.

Para comenzar, es necesario definir un sistema de referencias con relación al cual se describen los movimientos de los demás cuerpos: sistema de coordenadas.

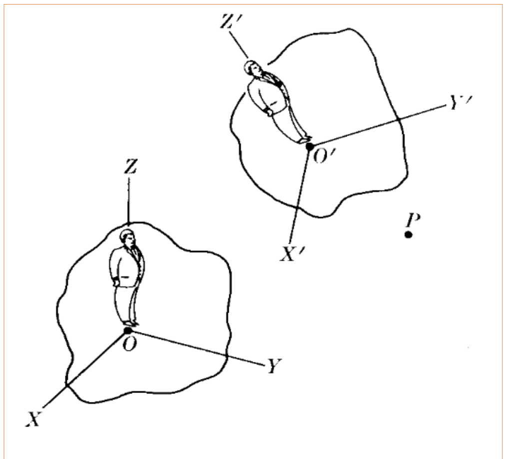


Fig. 5-1. Dos observadores diferentes estudian el movimiento de *P*.

Ejemplo: Ambos observadores (O y O´) utilizan los sistemas de referencias XYZ y X´Y´Z´.

Si los observadores se encuentran en reposo, observarán el mismo movimiento de P; pero si se están en movimiento relativo, sus observaciones serán diferentes.

Ahora bien, entraremos en detalle para definir la posición de un punto, en este caso de P, la cual está representada por tres números dados de acuerdo a las coordenadas.

La posición de una partícula en un instante de tiempo t se describe a través de un vector $\vec{r}\ (t)$ el cual se traza desde el origen de coordenadas, en este caso (O), al punto P.

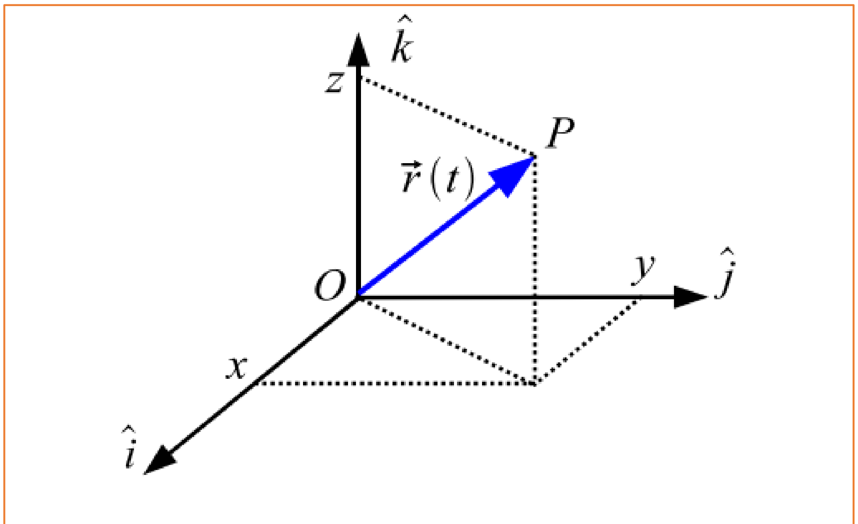


Figura 1.1: Vector posición en coordenadas cartesianas.

Entonces, escribimos la posición de la partícula:

$\vec{r}\ (t) = P - O$

La distancia OP se llama módulo del vector y se representa:

$|r|$ ó r

En tanto, de acuerdo al sistema cartesiano ortonormal, las magnitudes de la posición corresponden al producto escalar (.) del vector posición con los versores del sistema de coordenadas:

$\vec{r}\ (t) = x(t)\ \hat{\imath} + y(t)\ \hat{\jmath} + z(t)\hat{k}$, $x(t) = \vec{r}(t).\hat{\imath},$ etc.

Trayectoria: Lugar geométrico de los puntos que ocupa un cuerpo en movimiento.

Es el valor de las componentes del vector posición a cada tiempo t que da una descripción paramétrica de la curva que recorrerá la partícula en el espacio.

A las componentes del vector o también llamadas proyecciones del radio vector sobre los ejes, se les asigna un signo positivo o negativo de acuerdo al sentido creciente o decreciente en las coordenadas. Las componentes es la definición algebraica de un conjunto ordenado de tres números de un vector.

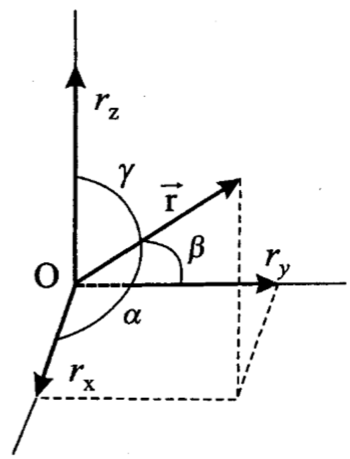
La relación entre el módulo del vector r y las componentes es: $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

La relación entre las componentes, dirección y sentido de r, determinados por los ángulos con sus tres ejes (ángulos directores) es:

$$\cos\alpha = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$

$$\cos\gamma = \frac{z}{r} = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$$



Comprobamos la relación:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

En tanto, un vector puede definirse geométricamente por el módulo: $(|A|) = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2}$) y los cosenos directores: $\cos\alpha = A_x/|A|$, $\cos\beta = A_y/|A|$, $\cos\gamma = A_z/|A|$ (por la relación: $\cos 2\ \alpha + \cos 2\,\beta + \cos 2\ \gamma = 1$).

"La suma y resta de vectores permite introducir el cálculo diferencial de vectores.

Si un vector es función de un parámetro (el tiempo, por ejemplo), se define como derivada del vector respecto del parámetro a la operación:

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{A}(t+\Delta t) - \mathbf{A}(t)}{\Delta t}$$

que se llevará a cabo analítica o geométricamente (Roederer, Capítulo 2. Cinemática del punto, p41)."

El movimiento de un punto se determina al conocer su posición en función del tiempo: $r = r(t)$, lo que nos indica que es necesario dar tres funciones de tiempo:

$x = x(t) \qquad r = r(t)$

$y = y(t) \quad$ o $\quad \alpha = \alpha(t)$

$z = z(t) \qquad \beta = \beta(t)$

$\gamma = \gamma(t)$ se deduce teniendo en cuenta la relación entre los cosenos directores.

Movimiento rectilíneo: Velocidad

El cuerpo se mueve en línea recta describiendo una trayectoria recta (tres, ascensor, etc).

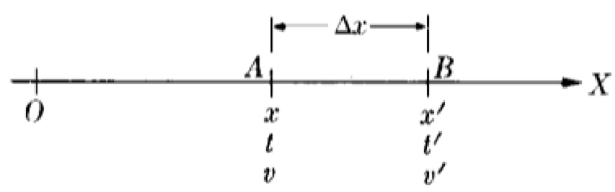


Figura 5-8

Asignamos un sentido y un punto de referencia que llamaremos O. El eje Ox coincide con la trayectoria.

Su desplazamiento se relaciona con el tiempo:

$x = f(t)$, donde x puede ser positiva o negativa.

En el tiempo t el objeto se encuentra en la posición A, $OA = x$

En el tiempo $t´$ el objeto se encuentra en la posición B, $OB = x´$

En ambos puntos, es decir, en ambas posiciones, surge una característica del movimiento: la Velocidad. Cuánto más espacio recorre la partícula en un lapso mínimo de tiempo, más rápido se mueve.

De esta manera se define la velocidad media, y se le adjudica signo positivo si la partícula se mueve hacia la derecha (creciente), y negativo cuando lo hace hacia la izquierda (decreciente); en tanto la velocidad promedio entre los puntos A y B está dada por:

$$v = \frac{x´-x}{t´-t} \text{ , esto es } \quad v = \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta \mathrm{t}}$$

Para determinar la velocidad en solo uno de los puntos, por ejemplo en A, debemos hacer los intervalos de tiempo tan pequeños posibles, y de esta manera estaremos determinando la velocidad instantánea, o sea, su valor límite el cual depende solo del instante en el cual está tomado:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Si observamos la ecuación anterior, es la derivada de la posición con respecto al tiempo, o sea:

$$v = \frac{dx}{dt}$$

Al conocer $v = f(t)$, se obtiene la posición integrando la ecuación anterior; y a su vez, de esta misma al despejar $dx = vdt$ e integrando, se obtiene:

$$\int_{x0}^{x} dx = \int_{t0}^{t} v\, dt,$$

donde x_0 es el valor de x en el tiempo t_0. Y, puesto que $\int_{x0}^{x} dx = x - x_0$

$$x = x_0 + \int_{t0}^{t} v\, dt. \tag{5.3}$$

En tanto, de acuerdo al significado de una integral definida tenemos:

$$\text{Desplazamiento} = x - x_0 = v_1\, dt_1 + v_2\, dt_2 + v_3\, dt_3 + \ldots =$$
$$= \sum_i v_i\, dt_i = \int_{t0}^{t} v\, dt.$$

El signo de la velocidad en el movimiento rectilíneo indica el movimiento.

EJEMPLO 5.1. **Una partícula se mueve a lo largo del eje X de manera que su posición en cualquier instante t está dado por $x = 5t^2 + 1$, donde x se expresa en metros y t en segundos. Calcular su velocidad promedio en el intervalo de tiempo entre (a) 2 s y 3 s, (b) 2 s y 2,1 s, (c) 2 s y 2,001 s, (d) 2 s y 2,00001 s. Calcular también (e) la velocidad instantánea a los 2 s.**

Solución: Haremos $t_0 = 2$ s, el cual es común para todo el problema. Usando $x = 5t^2 + 1$, tenemos $x_0 = 5(2)^2 + 1 = 21$ m. Entonces, para cada caso, $\Delta x = x - x_0$, $x - 21$ y $\Delta t = t - t_0 = t - 2$.

(a) Para $t = 3$ s, tenemos $\Delta t = 1$ s, $x = 5(3)^2 + 1 = 46$ m, y $\Delta x = 46 \text{ m} - 21 \text{ m} = 25$ m. Por lo tanto:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{25 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 25 \text{ m s}^{-1}.$$

(b) Para $t = 2{,}1$ s, tenemos $\Delta t = 0{,}1$ s, $x = 5(2{,}1)^2 + 1 = 23{,}05$ m, y $\Delta x = 2{,}05$ m. Por lo tanto:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{2{,}05 \text{ m}}{0{,}1 \text{ s}} = 20{,}5 \text{ m s}^{-1}.$$

(c) Para $t = 2{,}001$ s, tenemos $\Delta t = 0{,}001$ s, $x = 5(2{,}001)^2 + 1 = 21{,}020005$ m, y $\Delta x = 0{,}020005$ m. Por consiguiente:

$$\bar{v} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0{,}020005 \text{ m}}{0{,}001 \text{ s}} = 20{,}005 \text{ m s}^{-1}$$

(d) El estudiante puede verificar que para $t = 2{,}00001$ s, $\bar{v} = 20{,}00005$ m s^{-1}.

(e) Notamos que a medida que Δt se torna más pequeño, la velocidad se aproxima a 20 m s^{-1}. Luego podemos esperar que éste sea el valor de la velocidad instantánea cuando $t = 2$ s. Ciertamente:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 1) = 10t.$$

Cuando $t = 2$, obtenemos $v = 20$ m s^{-1} que es la respuesta a la pregunta (e).

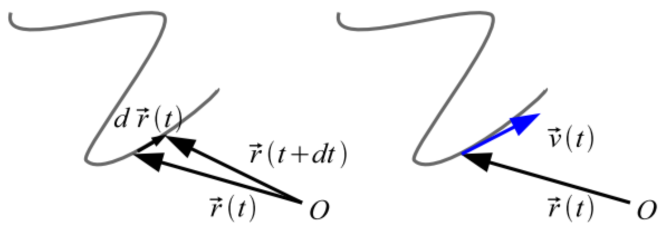


Figura 1.2: Velocidad instantánea de una partícula.

Ahora, pasando de la ecuación de velocidad instantánea: $\vec{v}\,(t) = \frac{d\vec{r}\,(t)}{dt}$

a coordenadas cartesianas:

$$\vec{v}\,(t) = \frac{dx}{dt}\,\hat{\imath} + \frac{dy}{dt}\,\hat{\jmath} + \frac{dz}{dt}\hat{k} = \dot{x}\hat{\imath} + \dot{y}\hat{\jmath} + \dot{z}\hat{k}$$

En resumen: la velocidad de un cuerpo es una función del tiempo, el movimiento es uniforme cuando la velocidad permanece constante.

Si hay variación en la velocidad, tenemos una nueva característica: la aceleración.

Igual que la anterior, podemos definir el promedio, es decir, la aceleración media:

$$a = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \text{ , esto es } \quad a = \frac{\Delta \mathrm{v}}{\Delta \mathrm{t}}$$

En tanto, la aceleración instantánea se obtiene calculando la derivada de la velocidad con respecto al tiempo:

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2 x}{dt^2}$$

La función s(t) debe ser derivable dos veces.

Si la aceleración es constante, el movimiento es uniformemente acelerado.

Al conocer la aceleración, podemos calcular la velocidad integrando:

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_{t_0}^{t} a\, dt,$$

donde v_0 es la velocidad en el tiempo t_0. Luego, como $\int_{v_0}^{v} dv = v - v_0$,

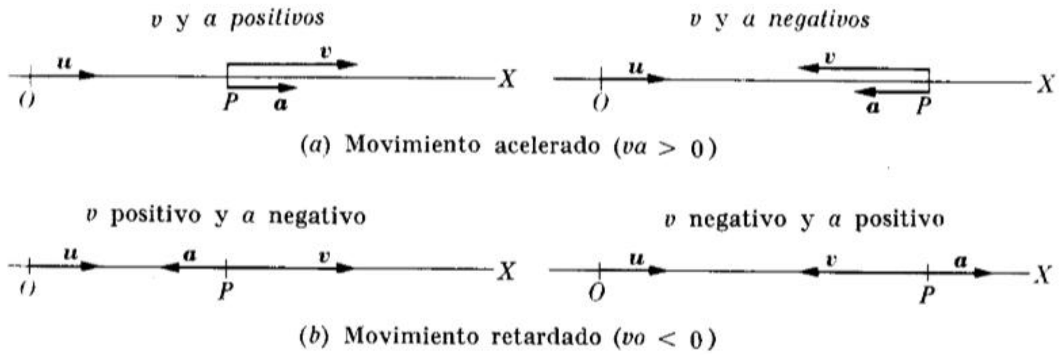
$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\, dt.$$

Esto nos dice que el cambio de velocidad $= v - v_0 = a_1\, dt_1 + a_2\, dt_2 + a_3\, dt_3 + \ldots$

$$= \sum_i a_i\, dt_i = \int_{t_0}^{t} a\, dt.$$

No obstante con la velocidad, también se relaciona con la posición: $a = \frac{d^2 x}{dt^2}$

$$v\,dv = a\,dt\left(\frac{dx}{dt}\right) = a\,dx.$$



(a) Movimiento acelerado ($va > 0$)

(b) Movimiento retardado ($va < 0$)

Cuando conocemos la posición y la aceleración, podemos integrar para calcular la velocidad:

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{x_0}^{x} a\,dx$$

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = \int_{x_0}^{x} a\,dx.$$

(ecuación 5.8)

<u>Representación vectorial de la velocidad y aceleración en el Movimiento Rectilíneo</u>

La velocidad es representada por un vector de longitud dada por la ecuación $v = \frac{dx}{dt}$, donde su dirección coincide con la del movimiento.

La aceleración es representada por un vector de magnitud dada por la ecuación $a = \frac{dv}{dt}$, donde su dirección corresponde a OX u opuesta (positiva o negativa). Tomando u como vector unitario en dirección positiva, escribimos en forma vectorial:

$$v = uv = u\frac{dx}{dt} \qquad \text{y} \qquad a = x\frac{dv}{dt}$$

"Los vectores v y a están dirigidos en la dirección de u o en la dirección opuesta, dependiendo de los signos de $\frac{dx}{dt}$ y $\frac{dv}{dt}$, respectivamente" (Mecánica. Alonso y Finn, Tomo I en español, cinemática, p.92).

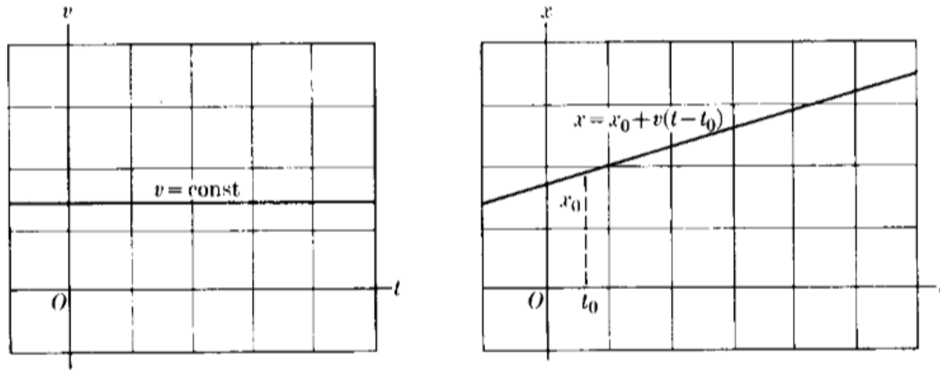
Movimiento acelerado: Signo de v y a son iguales.

Movimiento retardado: Signo de v es opuesto al de a

EJEMPLO 5.2. Movimiento rectilíneo uniforme.

Solución: En este caso v es constante. Entonces $a = dv/dt = 0$; esto es, no hay aceleración. De la ec. (5.3), cuando v es constante, tenemos:

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} v\,dt = x_0 + v\int_{t_0}^{t} dt = x_0 + v(t - t_0).$$



(a) Gráfico de la velocidad

(b) Gráfico del desplazamiento

Fig. 5-5. Gráficos de la velocidad y el desplazamiento en el movimiento uniforme.

EJEMPLO 5.3. Movimiento rectilíneo uniformemente acelerado.

Solución: En este caso a es constante. Por lo tanto, de la ec. (5.6) tenemos

$$v = v_0 + \int_{t_0}^{t} a\,dt = v_0 + a\int_{t_0}^{t} dt = v_0 + a(t - t_0),$$

y de la ec. (5.3), tenemos

$$x = x_0 + \int_{t_0}^{t} [v_0 + a(t - t_0)]\,dt = x_0 + v_0\int_{t_0}^{t} dt + a\int_{t_0}^{t} (t - t_0)\,dt,$$

ó

$$x = x_0 + v_0(t - t_0) + \tfrac{1}{2}a(t - t_0)^2.] \qquad (5.11)$$

Es también útil obtener una relación a partir de la ec. (5.8),

$$\tfrac{1}{2}v^2 - \tfrac{1}{2}v_0^2 = a\int_{x_0}^{v} dx = a(x - x_0).$$

Luego

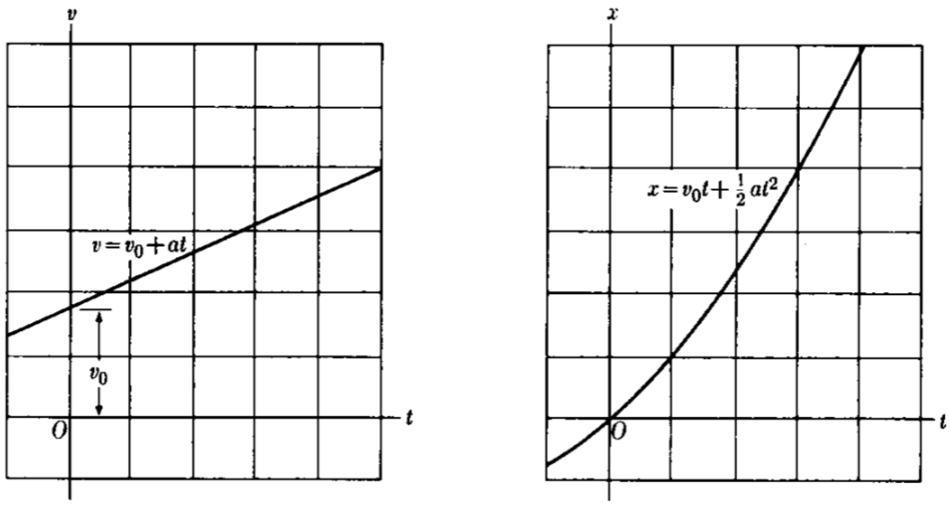
$$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0). \qquad (5.12)$$

En este último movimiento tenemos la caída libre bajo la acción de la gravedad.

Tomando la dirección vertical hacia arriba como positiva, se define $a = -g$, donde $g = 9{,}8\ {}^{m}/_{s^2}$.

Se puede representar v y x en función de t :

$t_0 = 0$ y $x_0 = 0$, simplificando a: $v = v_0 + at$ y $x = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$

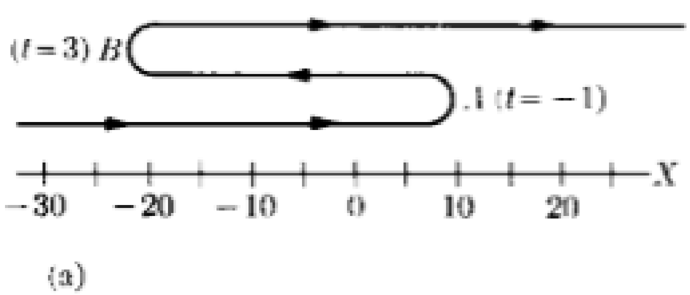


(a) Gráfico de la velocidad (b)· Gráfico del desplazamiento

Fig. 5-6. Gráficos de la velocidad y el desplazamiento en el movimiento uniformemente acelerado.

Movimiento curvilíneo: velocidad

La partícula describe trayectoria rectilínea: en el tiempo t se encuentra en el punto A, su posición está dada por el vector: $r = \overrightarrow{OA} = u_x x + u_y y + u_z z$



En tiempo t' se encuentra en B: $r' = \overrightarrow{OB} = u_x x' + u_y y' + u_z z'$

Su desplazamiento es: $\overrightarrow{AB} = \Delta r$

Como $r' = r + \Delta r$, entonces:

$$\overrightarrow{AB} = \Delta r = r' - r = u_x(x' - x) + u_y(y' - y) + u_z(z' - z)$$

$$\overrightarrow{AB} = u_x\,(\Delta x) + u_y\,(\Delta y) + u_z\,(\Delta z)$$

La velocidad promedio es un vector definido por:

$$\bar{v} = \frac{\Delta \mathrm{r}}{\Delta t}$$

$$\bar{v} = u_x \frac{\Delta \mathrm{x}}{\Delta t} + u_y \frac{\Delta \mathrm{y}}{\Delta t} + u_z \frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta t}$$

Se representa con un vector paralelo al desplazamiento:

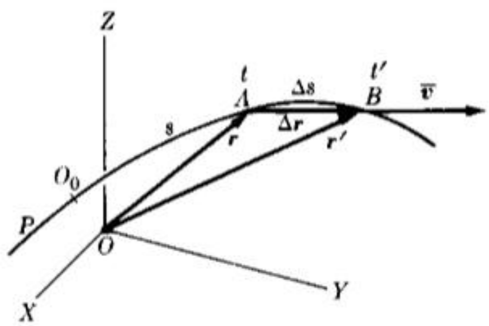


Fig. 5-9. Desplazamiento y velocidad promedio en el movimiento curvilíneo.

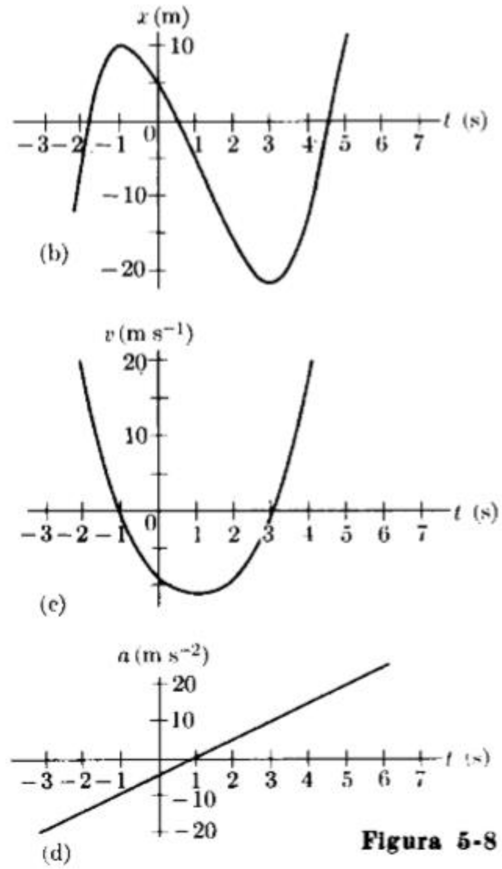


Figura 5-8

Y para calcular la velocidad instantánea hacemos que Δt se aproxime a cero:

$$\bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta r}{\Delta t}$$

En este instante, el punto B se aproxima a A, donde tenemos a B´y B´´:

por lo que el vector $\overrightarrow{AB} = \Delta r$ cambia continuamente de magnitud y dirección, como también la velocidad promedio.

Cuando B está muy cercano a A, el vector $\overrightarrow{AB} = \Delta r$ coincide con la dirección de la tangente AT.

En este movimiento la velocidad instantánea es un vector tangente a la trayectoria, dado por:

$$v = \frac{dr}{dt} \qquad \text{ó} \qquad v = u_x \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} + u_y \frac{\mathrm{dy}}{dt} + u_z \frac{\mathrm{dz}}{\mathrm{dt}}$$

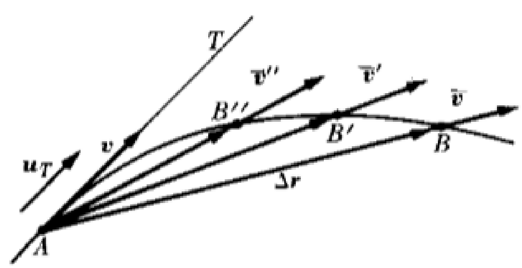


Fig. 5-10. La velocidad es tangente a la trayectoria en el movimiento curvilíneo.

Las componentes de la velocidad en X, Y, Z son:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

La magnitud de la velocidad:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

MATERIALES Y EJERCICIOS EN CLASE POR ZOOM

(Mes: Abril)

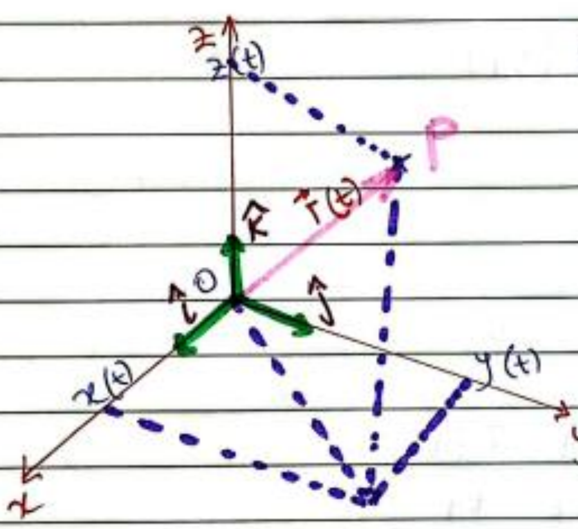
- PRIMER ENCUENTRO 12/04/24

- Cinemática en coordenadas cartesianas -

Mecánica Newtoniana o Mecánica Vectorial.

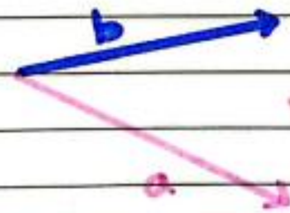
Partícula: cualquier objeto cuyas dimensiones sean mucho menores que las distancias que recorre en su trayectoria, y su representación será un punto.

En esta teoría, los conceptos de ESPACIO y TIEMPO se interpretan como ABSOLUTOS y CONTINUOS.



Si vas de x a y, se obtiene z. (con la mano derecha).

Formas de representar vectores: escalar y vectorial.



$c = a \cdot b$

Producto escalar: se multiplican las componentes paralelas entre sí.

Ej: Trabajo, flujo, circular.

$d = a \times b$

Perpendicular a los vectores a y b.

Producto vectorial: se multiplican las componentes perpendiculares entre sí.

Ej: momento angular, torque, fuerza mag.

- **Posición de una partícula**: vector $\vec{r}(t)$

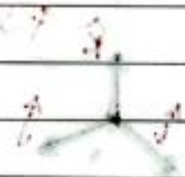
$$\vec{r}(t) = P - O$$ (del origen al punto P en la figura)

Según Gauss: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}$.

cambian en el tiempo, son independientes entre sí

- **Trayectoria y desplazamiento**

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$$



- **Velocidad media**

$$\vec{v}_m = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1}$$

- **Velocidad instantánea (velocidad)**

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

derivada primera de la posición

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Notación de Newton. $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$

- Velocidad instantánea en cartesianas

La derivación de la posición con respecto al tiempo, se obtiene v:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j} + z(t)\hat{k}\right)$$

Implica seis términos:

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + x\cancel{\frac{d\hat{i}}{dt}} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + y\cancel{\frac{d\hat{j}}{dt}} + \frac{dz}{dt}\hat{k} + z\cancel{\frac{d\hat{k}}{dt}}$$

se cancelan porque son constantes, por lo tanto vale 0

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} + \frac{dz}{dt}\hat{k}$$

- Aceleración media

$$\vec{a}_m = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$$

$$\Delta\vec{v} = \vec{v}_{(t')} - \vec{v}_{(t)}$$

- Aceleración instantánea (aceleración)

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x(t)\hat{i} + v_y(t)\hat{j} + v_z(t)\hat{k}\right)$$

Implica seis términos:

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \cancel{v_x\frac{d\hat{i}}{dt}} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \cancel{v_y\frac{d\hat{j}}{dt}} +$$

$$\frac{dv_z}{dt}\hat{k} + \cancel{v_z\frac{d\hat{k}}{dt}}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\hat{k} =$$

$$= \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \ddot{\vec{r}}$$ derivada segunda de la posición

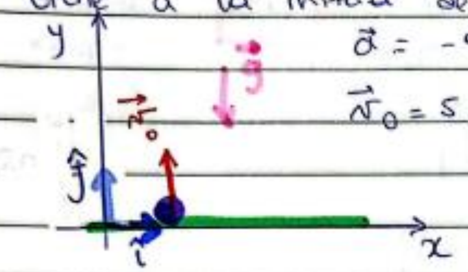
- Ejercicio -

Una piedra es lanzada verticalmente hacia arriba, respecto al piso, con velocidad de módulo 5,0 m/s. Si no hubiera roce con el aire, ¿qué altura alcanzaría? (en el Planeta Tierra). ¿cuánto tiempo tarda en volver al piso?, ¿qué velocidad tiene a la mitad de la altura máxima?

Luna, marte y asteroide tienen aceleración gravitatoria (con otro módulo).

$\vec{a} = -9{,}8 \text{ m/s}^2 \hat{j}$

$\vec{v}_0 = 5{,}0 \text{ m/s } \hat{j}$



1 - Elegir sistema de coordenadas inercial (exterior al cuerpo)

2 - Coloco los versores $\hat{i}$, $\hat{j}$.

3 - Registro la velocidad con notación vectorial: en y ($\hat{j}$)

→ Encontrar $\vec{v}$ en función del tiempo: $v(t)$.

$$\Delta \vec{v} = \int_0^t \vec{a}\, dt$$

$$\vec{v} = \int_0^t \vec{a}\, dt + \vec{v}_0 \rightarrow \vec{v} = \int -9{,}8 \hat{j}\, dt + \vec{v}_0$$

$$\vec{v} = -9{,}8\, t \hat{j} + 5{,}0 \hat{j} = \boxed{\vec{v} = (5{,}0 - 9{,}8\, t)\hat{j}} \quad \text{I}$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}\, dt + \vec{r}_{(0)} \qquad \vec{r} = \int (5{,}0 - 9{,}8t)\hat{j}\, dt$$

$\vec{r}(0) = 0$

$$\vec{r} = \int 5{,}0 \hat{j}\, dt - \int 9{,}8\, t \hat{j}\, dt$$

$\vec{r} = 5{,}0\,t\,\hat{j} - 9{,}8\,\frac{t^2}{2}\,\hat{j}$

$$\boxed{\vec{r}(t) = \left(5{,}0\,t - \frac{9{,}8}{2}t^2\right)\hat{j}} \quad (II)$$

Punto más alto $\rightarrow \vec{v} = 0. \Rightarrow 5{,}0 - 9{,}8\,t = 0$

$t = \frac{5{,}0}{9{,}8} \simeq \boxed{0{,}5\,s} \rightarrow$ tiempo de altura y máx

- Sustituimos en la ecuación II:

$r(0{,}5) = \left(5{,}0 \times 0{,}5 - \frac{9{,}8}{2}(0{,}5)^2\right)\hat{j}$

$r(0{,}5) = (2{,}5 - 1{,}25)\hat{j} = (1{,}23\,m)\hat{j}$

$$\boxed{y\ máx = 1{,}23\ m}$$

OTRA OPCIÓN:

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \rightarrow \vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$

Eje y: $v^2 = v_0^2 + 2a\Delta y \rightarrow \Delta y = \frac{\cancel{v^2} - v_0^2}{2a} = \frac{-5{,}0^2}{2(-9{,}8)}$

$$\boxed{\Delta y = 1{,}25\ m}$$

En el piso $\vec{r}(t) = 0 \Rightarrow 5{,}0\,t - \frac{9{,}8}{2}t^2 = 0$

$t(5{,}0 - 5{,}0\,t) = 0$, $t = 0$

$t = \frac{5{,}0}{5{,}0} \simeq 1{,}0\,s.$

SEGUNDO ENCUENTRO - 26/04/24 -

- Calcular el tiempo en que llega a la mitad de la altura máxima:

$$r(t) = \left(5{,}0\,t - \frac{9{,}8}{2}\,t^2\right)\hat{j} = 0{,}63$$

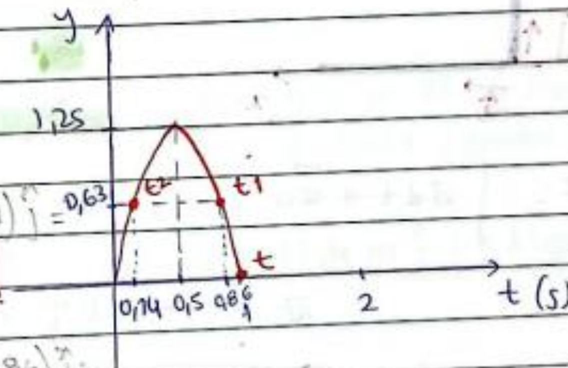
$$5{,}0\,t - \frac{9{,}8}{2}\,t^2 - 0{,}63 = 0.$$

b a c

$$= \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-4{,}9)\cdot(-0{,}63)}}{2(-4{,}9)} = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12{,}3}}{-9{,}8} = \frac{-5 \pm \sqrt{12{,}7}}{-9{,}8}$$

$t_1 = -0{,}86\,s$

$t_2 = 0{,}14\,s$



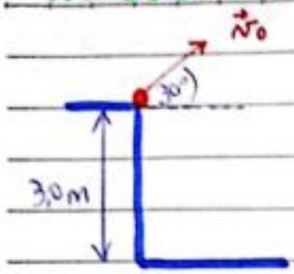
$\Rightarrow \vec{v}(0{,}14) = (5 - 9{,}8 \cdot 0{,}14)\,\hat{j} =$

$\boxed{\vec{v}(0{,}14) = (3{,}6\,\hat{j})\ m/s}$

$\Rightarrow \vec{v}(0{,}86) = (5 - 9{,}8 \cdot 0{,}86)\,\hat{j} =$

$\boxed{\vec{v}(0{,}86) = (-3{,}3\,\hat{j})\ m/s}$

PROBLEMA:

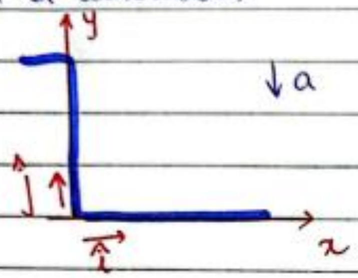


$|\vec{v}_0| = 10\ m/s$ (sin roce)

Conocer: a) - Velocidad de impacto.

b) - Altura máxima

1) Eje de coordenadas:



$$\vec{v}_0 = \overset{10}{v_0} \cdot \cos 30° \,\hat{i} + \overset{10}{v_0} \cdot \operatorname{Sen} 30° \,\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{v}_0 = (8,7\,\hat{i} + 5,0\,\hat{j})\ m/s}$$

$$\vec{a} = -9,8\ m/s^2\ \hat{j}$$

obtengo velocidad:

$$\vec{v} = \int \vec{a}\,dt + \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{v} = \int -9,8\,\hat{j}\,dt + 8,7\,\hat{i} + 5,0\,\hat{j}$$

$$\vec{v} = -9,8\,t\,\hat{j} + 8,7\,\hat{i} + 5,0\,\hat{j} =$$

$$\boxed{\vec{v} = \underbrace{8,7\,\hat{i}}_{MRU} + \underbrace{(5,0 - 9,8\,t)}_{MUA}\hat{j}\ m/s}$$

obtengo posición:

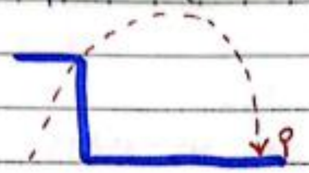
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \longrightarrow \vec{r} = \int \vec{v}\,dt + \vec{r}_0 \qquad (\vec{r}_0 = 3,0\,\hat{j})$$

$$\vec{r} = \int \left[8,7\,\hat{i} + (5,0 - 9,8\,t)\hat{j}\right] dt + 3,0\,\hat{j}$$

$$\vec{r} = 8,7\,t\,\hat{i} + 5,0\,t\,\hat{j} - \frac{9,8}{2}t^2\,\hat{j} + 3,0\,\hat{j}$$

$$\boxed{\vec{r} = 8,7\,t\,\hat{i} + (3,0 + 5,0\,t - 5,0\,t^2)\hat{j}}$$

- Punto de impacto (P) $\rightarrow y(P)=0$



$3{,}0 + 5{,}0t - 5{,}0t^2 = 0$

c b a

$$t = \frac{-5{,}0 \pm \sqrt{5{,}0^2 - 4(-5{,}0)(3{,}0)}}{2(-5{,}0)} \begin{cases} \boxed{t_1 = 1{,}42\,seg} \\ t_2 = -0{,}42\,seg. \end{cases}$$

$\boxed{t\ \text{impacto}: 1{,}42\ s}$

* Si sustituyo en r, lo debo hacer sólo en el primer término $(\hat{i})$, porque para el otro es raíz (dentro del paréntesis:

$$\vec{r}(1{,}42) = 8{,}7 \cdot 1{,}42\,\hat{i} = \boxed{12{,}4\ m\ \hat{i}} \rightarrow \text{Alcance}$$

* Para la velocidad de impacto:

$$v(1{,}42) = 8{,}7\,\hat{i} + (5{,}0 - 9{,}8 \cdot 1{,}42)\hat{j} = \boxed{(8{,}7\hat{i} - 8{,}9\,\hat{j})\,m/s}$$

$$\left.\begin{aligned} |\vec{v}| &= \sqrt{8{,}7^2 + 8{,}9^2} = 12{,}4\ m/s. \\ \theta &= \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-8{,}9}{8{,}7}\right) = -45{,}7^\circ \end{aligned}\right\} \quad 12{,}4 \angle -45{,}7^\circ = v$$

Anotación polar

* Altura máxima $\rightarrow v_y = 0$

$$v_y = 5{,}0 - 9{,}8t = 0$$

$$t = \frac{5{,}0}{9{,}8} \simeq 0{,}51\ s$$

- Sustituyo en posición:

$$\vec{r}(0{,}51) = 8{,}7 \cdot 0{,}51\,\hat{i} + \left(3{,}0 + 5{,}0 \cdot 0{,}51 - \frac{9{,}8 \cdot 0{,}51^2}{2}\right)\hat{j} =$$

$$\boxed{\vec{r} = (4{,}35\,\hat{i} + 6{,}4\,\hat{j})\,m}$$

Referencias bibliográficas:

- ALONSO, M; FINN, E- J. (1971)*: "Física vol. I* (Español). *Mecánica*", México. Editorial Fondo educativo interamericano S.A.
- ROEDERER. J.G.(2008)*: "Mecánica elemental, 2da edición* (2da reimpresión)", Buenos Aires, Editorial Universitaria de Buenos Aires.
- Apuntes Mecánica Newtoniana_Facultad de Ingeniería.
- Apuntes clases de Mecánica 2024 Semipresencial (plataforma crea cfe).