Problemas – Tema 2

Problemas resueltos - 10 - Teorema de Bolzano y Teorema de valores intermedios

1. Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ y $g:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ las funciones definidas por $f(x)=|x^2-2x|$ y $g(x)=\ln(x)$.

a) Realiza un esbozo de ambas gráficas sobre los mismos ejes.

b) Utiliza el Teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de ambas gráficas en el intervalo $[2,3]$.

a) La forma más directa de representar $f(x)=|x^2-2x|$ es estudiar la parábola $h(x)=x^2-2x$ y pasar a valores positivos aquellos intervalos donde la función se haga negativa.

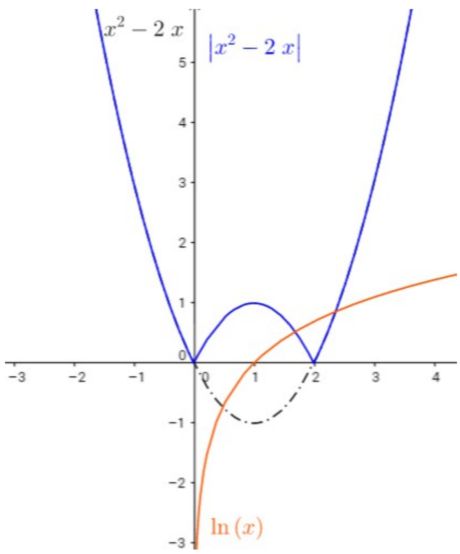
$h(x)=x^2-2x$ $\rightarrow$ Corte con eje OX $\rightarrow$ $x^2-2x=0$ $\rightarrow$ $(0,0)$, $(2,0)$

$h(x)=x^2-2x \rightarrow h'(x)=2x-2$, $h'(x)=0 \rightarrow 2x-2=0 \rightarrow x=1$

$h'(x)=2x-2 \rightarrow h''(x)=2>0 \rightarrow x=1$ es un mínimo relativo

El vértice de la parábola es el punto $(1,-1)$, y será un mínimo relativo y absoluto de la parábola. Al estudiar la función valor absoluto $f(x)=|x^2-2x|$ tendremos un máximo relativo en $(1,-1)$.

La función $g(x)=\ln(x)$ es estrictamente creciente en su dominio $(0,+\infty)$ y corta al eje OX en $(1,0)$. Posee una asíntota vertical a la derecha de $x=0$.



b) El Teorema de Bolzano afirma que si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, tal que $f(a)\cdot f(b)<0$, existe un valor $c\in(a,b)$ solución de la función. Es decir: $f(c)=0$.

En nuestro caso particular, en el intervalo $[2,3]$ el punto de corte surge de igualar las funciones de la forma:

$$x^2-2x=\ln(x) \quad\rightarrow\quad x^2-2x-\ln(x)=0$$

La función $t(x)=x^2-2x-\ln(x)$ es continua en el intervalo $[2,3]$, por ser suma y diferencia de funciones continuas en ese intervalo (polinomio y logaritmo).

$$f(2)=4-4-\ln(2)<0$$
$$f(3)=9-6-\ln(3)>0$$

La función cambia de signo en los extremos del intervalo $[2,3]$, por lo que estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Bolzano → $\exists c\in[2,3]/t(c)=0$.

Acotamos el intervalo.

$x=2{,}5 \rightarrow f(2{,}5)=(2{,}5)^2-5-\ln(2{,}5)>0$ → Tomamos el intervalo $[2,\ 2{,}5]$

$x=2{,}25 \rightarrow f(2{,}25)<0$ → Tomamos el intervalo $[2{,}25,\ 2{,}5]$

$x=2{,}375 \rightarrow f(2{,}375)>0$ → Tomamos el intervalo $[2{,}25,\ 2{,}375]$

$x=2{,}3 \rightarrow f(2{,}3)<0$ → Tomamos el intervalo $[2{,}3,\ 2{,}375]$

El punto de corte, con precisión de una cifra decimal, es $x\simeq 2{,}3...$.

2. Enuncia el Teorema de Bolzano, y utilízalo para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las gráficas $g(x)=e^x$ y $h(x)=-x$ en el intervalo $[-1,0]$.

El Teorema de Bolzano afirma que si $f(x)$ es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, tal que $f(a)\cdot f(b)<0$, existe un valor $c\in(a,b)$ solución de la función. Es decir: $f(c)=0$.
En nuestro caso particular → $e^x=-x$ → $e^x+x=0$ → La función $f(x)=e^x+x$ que queda a la izquierda de la igualdad es continua en toda la recta real, por ser suma de funciones continuas para todos los reales.

En el intervalo $[-1,0]$ → $f(-1)=\frac{1}{e}-1<0$, $f(0)=e^0+0>0$ → Estamos en condiciones de aplicar Bolzano.

$x=-0,5$ → $f(-0,5)=e^{(-0,5)}-0,5>0$ → Tomamos el intervalo $[-1,-0,5]$
$x=-0,75$ → $f(-0,75)<0$ → Tomamos el intervalo $[-0,75,\ -0,5]$
$x=-0,6$ → $f(-0,6)<0$ → Tomamos el intervalo $[-0,6,\ -0,5]$

El punto de corte, con precisión de una cifra decimal, es $x\simeq-0,5...$.

3. Utiliza el Teorema de Bolzano para encontrar, con precisión de una cifra decimal, el punto de corte de las funciones $f(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3$ **y** $g(x)=e^x$ **en el intervalo** $[-1,0]$ **.**

El punto de corte de ambas gráficas implica → $f(x)=g(x) \rightarrow f(x)-g(x)=0$

Es decir → $3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x=0$

Sobre esta ecuación vamos a aplicar Bolzano, tomando como función:

$h(x)=3x^5-10x^4+10x^3+3-e^x$

$h(-1)<0 \quad , \quad h(0)>0 \quad \rightarrow \quad \exists c\in[-1,0]/h(c)=0$

$h(-0,5)>0$ → probamos en $[-1,\ -0,5]$

$h(-0,7)<0$ → probamos en $[-0,7,\ -0,5]$

$h(-0,6)<0$ → probamos en $[-0,6,\ -0,5]$

La solución, con precisión de una cifra decimal, es $x\simeq-0,5...$.

4. Encuentra una solución con precisión de dos cifras decimales de la ecuación $\ln(x)+x=0$.

Usaremos el Teorema de Bolzano en el intervalo $[1/10, 1]$ con la función $f(x)=\ln(x)+x$, que es continua en el intervalo $(0,\infty)$.

Evaluamos la función en los extremos del intervalo $[1/10, 1]$.

$$f(1/10)=\ln(1/10)+1/10<0$$
$$f(1)=\ln(1)+1>0$$

Como $f(1/10)\cdot f(1)<0$ podemos asegurar, por el Teorema de Bolzano, que la función corta al menos una vez al eje OX. Vamos a probar algunos puntos del intervalo para acotar el valor aproximado de la solución a dos cifras decimales.

[0,1 , 1] → probamos con x=0,5 → $f(0{,}5)=\ln(0{,}5)+0{,}5<0$

[0,5 , 1] → probamos con x=0,7 → $f(0{,}7)=\ln(0{,}7)+0{,}7>0$

[0,5 , 0,7] → probamos con x=0,6 → $f(0{,}6)=\ln(0{,}6)+0{,}6>0$

[0,5, 0,6] → probamos con x=0,55 → $f(0{,}55)=\ln(0{,}55)+0{,}55<0$

[0,55 , 0,6] → probamos con x=0,58 → $f(0{,}58)=\ln(0{,}58)+0{,}58>0$

[0,55 , 0,58] → probamos con x=0,57 → $f(0{,}57)=\ln(0{,}57)+0{,}57<0$

Solución con dos cifras decimales: $x\simeq 0{,}57...$