Problemas – Tema 8

Problemas resueltos - 10 - asíntotas en cociente de polinomios

1. Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}$ **.**

El dominio de la función son todos los números reales excepto donde se anula el denominador.

$D(f)=R-\{-1,1\}$

Si encontramos límites donde $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, entonces la recta $x=a$ es una asíntota vertical. Estudiamos los límites laterales alrededor de los puntos donde no está definida la función.

$\lim_{x\to -1^+} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$, $\lim_{x\to -1^-} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$ → asíntota vertical en $x=-1$

$\lim_{x\to 1^+} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$ → asíntota vertical en $x=1$

Si encontramos límites donde $\lim_{x\to\infty} f(x)=k$, entonces la recta vertical $y=k$ es una asíntota horizontal.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\frac{-\infty}{\infty}$$

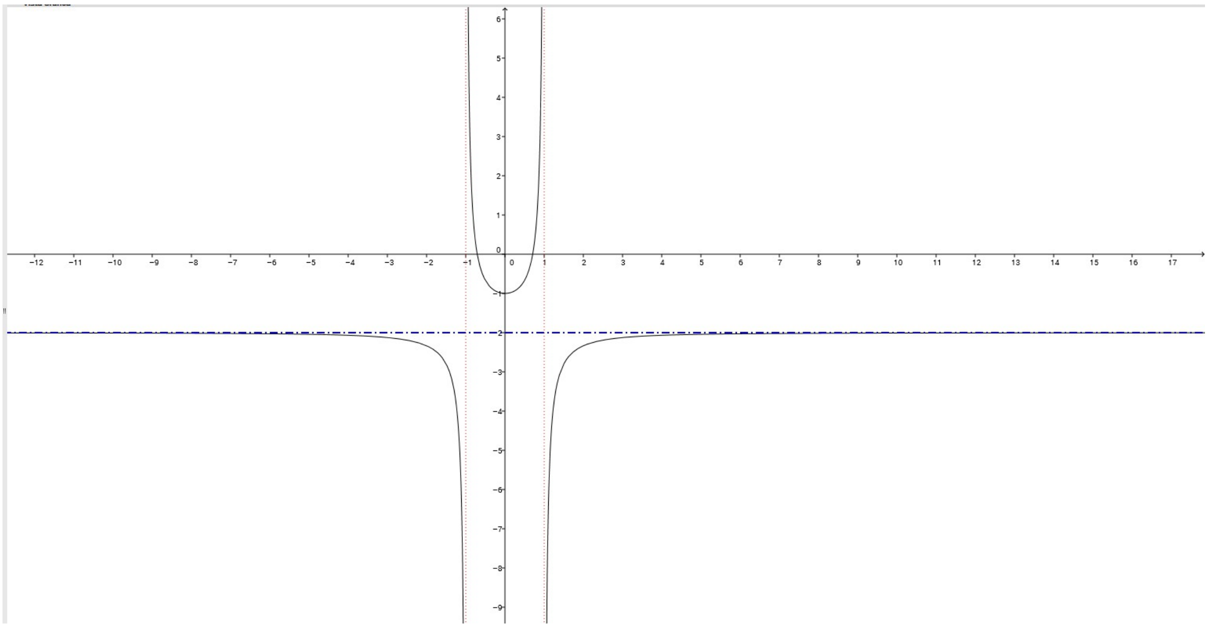
Dividimos por la máxima potencia x^2 y simplificamos:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-2x^2}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}-2}{1-\frac{1}{x^2}}=(evaluar)=\frac{\frac{1}{\infty}-2}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{0-2}{1-0}=-2$$

Aparece asíntota horizontal $y=-2$ tanto en más como en menos infinito. Al ser un cociente de polinomios la AH en menos infinito coincidirá con el valor de la AH en más infinito.

Al existir asíntota horizontal, no existen oblicuas.

$$\text{Gráfica de } f(x)=\frac{1-2x^2}{x^2-1}\text{, asíntotas horizontales y verticales}$$



2. Dada la función $f(x)=\dfrac{x^3}{(x-3)^2}$ **calcula sus asíntotas.**

Estamos ante un cociente de polinomios. El dominio de la función son todos los reales menos los valores que anulan al denominador: $Dom(f)=\mathbb{R}-\{3\}$.

En $x=3$ tenemos un candidato a asíntota vertical.

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\frac{3^3}{(3-3)^2}=\frac{27}{0}=\infty$$

Estudiamos los límites laterales.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\frac{27}{0^+}=+\infty \ , \ \lim_{x\to 3^+}\frac{x^3}{(x-3)^2}=\frac{27}{0^+}=+\infty$$

Tenemos asíntota vertical en $x=3$.

El grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, por lo que no habrá asíntota horizontal pero sí asíntota oblicua.

Al ser un cociente de polinomios, la AO cuando la variable tiende a más infinito coincidirá con la AO cuando la variable tiende a menos infinito.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x(x-3)^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x^3-6x^2+9x}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Dividimos por la máxima potencia x^3 , simplificamos y evaluamos → $m=1$

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{(x-3)^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-(x^3-6x^2+9x)}{x^2-6x+9}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2+9x}{x^2-6x+9}=6$$

Nuevamente dividimos por la máxima potencia x^2 , simplificamos y evaluamos → $n=6$

Tenemos asíntota oblicua: $y=x+6$

3. Calcula las asíntota de $f(x)=\frac{x}{1+2x}$

Todo cociente de polinomio está definido en toda la recta real salvo en los valores que anulan al denominador.

$$1+2x=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad Dom(f)=\mathbb{R}-\{\frac{-1}{2}\}$$

Nuestro candidato a asíntota vertical es $x=\frac{-1}{2}$ → calculamos límites laterales.

$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}^-} \frac{x}{1+2x}=\frac{\frac{-1}{2}}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{-1}{2}^+} \frac{x}{1+2x}=\frac{\frac{-1}{2}}{0^+}=-\infty$$

En $x=\frac{-1}{2}$ tenemos una asíntota vertical.

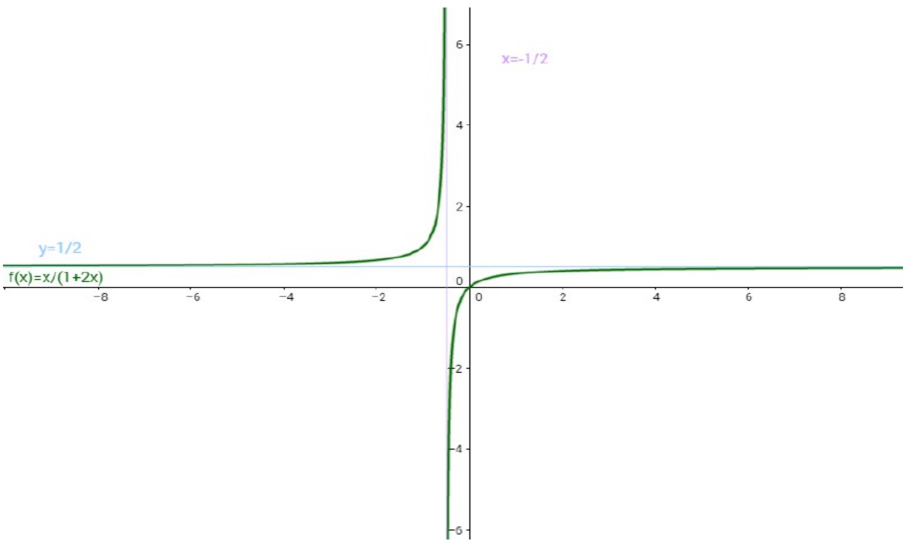
El estudio de la asíntota horizontal lo hacemos planteando el límite en el infinito. Como el polinomio del numerador coincide en grado con el polinomio del denominador, el límite tiende al cociente de los coeficientes de la máxima potencia de la incógnita en los polinomios. Es decir:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{1+2x}=\frac{1}{2}$$

Tenemos asíntota horizontal en la recta $y=\frac{1}{2}$ tanto en más como en menos infinito. Al ser un cociente de polinomios basta con calcular el límite en más infinito.

Al existir asíntota horizontal,

no existe oblicua.



4. Calcula las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^3}{1+x^2}$ **.**

Tenemos un cociente de polinomios. El numerador no se anula para ningún valor real, por lo que no tendremos asíntotas verticales.

El grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador. Por lo tanto, no tenemos asíntota horizontal pero sí oblicua.

Estudiamos las oblicuas con la forma $y=mx+n$ con los siguientes límites (al ser cociente de polinomios la AO en más infinito coincidirá con la AO en menos infinito).

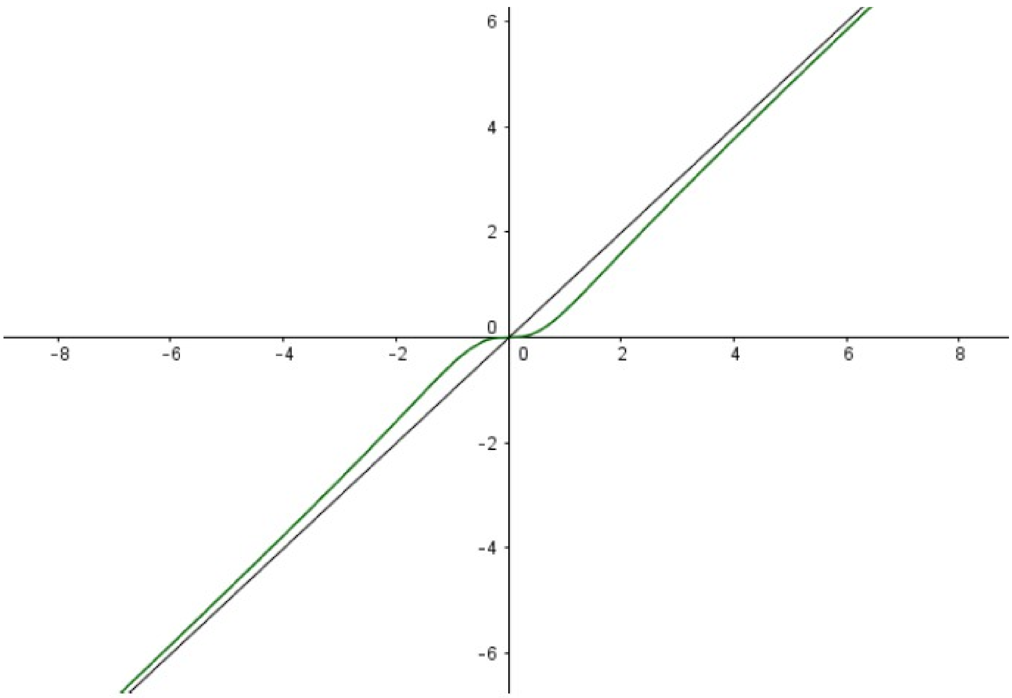
$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x+x^3}=1$$

El valor del límite resulta $m=1$ porque tenemos un cociente de polinomios del mismo grado con coeficientes iguales. Por lo que el límite en el infinito es el cociente de esos coeficientes.

$$m=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1+x^2}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{1+x^2}=0 \quad\rightarrow\quad n=0$$

El límite resulta $n=0$ porque el grado del denomiador es mayor que el grado del numerador.

Nuestra asíntota oblicua queda $y=x$, tal y como podemos ver en la siguiente representación gráfica.



5. Calcula la ecuación de las asíntotas de la función $f(x)=\frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$.

Dominio de la función: dominio del numerador intersectado con el dominio del denominador, menos los valores que anulan al denominador.

El dominio del numerador son todos los reales porque el discriminante de la raíz siempre es positivo.

El dominio del denominador son todos los reales por se un polinomio.

El denominador se anula en $x=-1$.

Conclusión: El dominio de la función son todos los reales menos $x=-1$

Los candidatos a asíntotas verticales son los valores que no pertenecen al denominador. En nuestro caso debemos estudiar los límites laterales en $x=-1$.

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\sqrt{5}}{0-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\sqrt{5}}{0+}=+\infty$$

Existe AV en $x=-1$.

La asíntota horizontal se calcula estudiando a convergencia de los siguientes límites:

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$$

Al tener una raíz de un polinomio debemos estudiar el límite en más y en menos infinito.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\frac{\infty}{\infty}$$ → Indeterminación

Se resuelve esta indeterminación dividiendo numerador y denominador por la variable elevada al mayor exponente. En nuestro caso el mayor exponente es x , ya que el factor x^2 del numerador está dentro de una raíz cuadrada. Y un polinomio de grado dos dentro de una raíz, en el infinito, se comporta como un polinomio de grado uno.

El factor x entra dividiendo dentro de la raíz como x^2 .

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}=\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{2x}{x}+\frac{2}{x}}=(simplificar)=\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{2+\frac{2}{x}}=\frac{\sqrt{4+0}}{2+0}=\frac{2}{2}=1$$

Existe AH $y=1$ si x tiende a más infinito.

Pasamos a estudiar la AH cuando x tiende a menos infinito.

$\lim_{x \to -\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}$ → cambiamos x por $-x$ y cambiamos ∞ por $-\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4(-x)^2+1}}{2(-x)+2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{4x^2+1}}{-2x+2} = \frac{\infty}{-\infty}$$ → dividimos por la máxima potencia

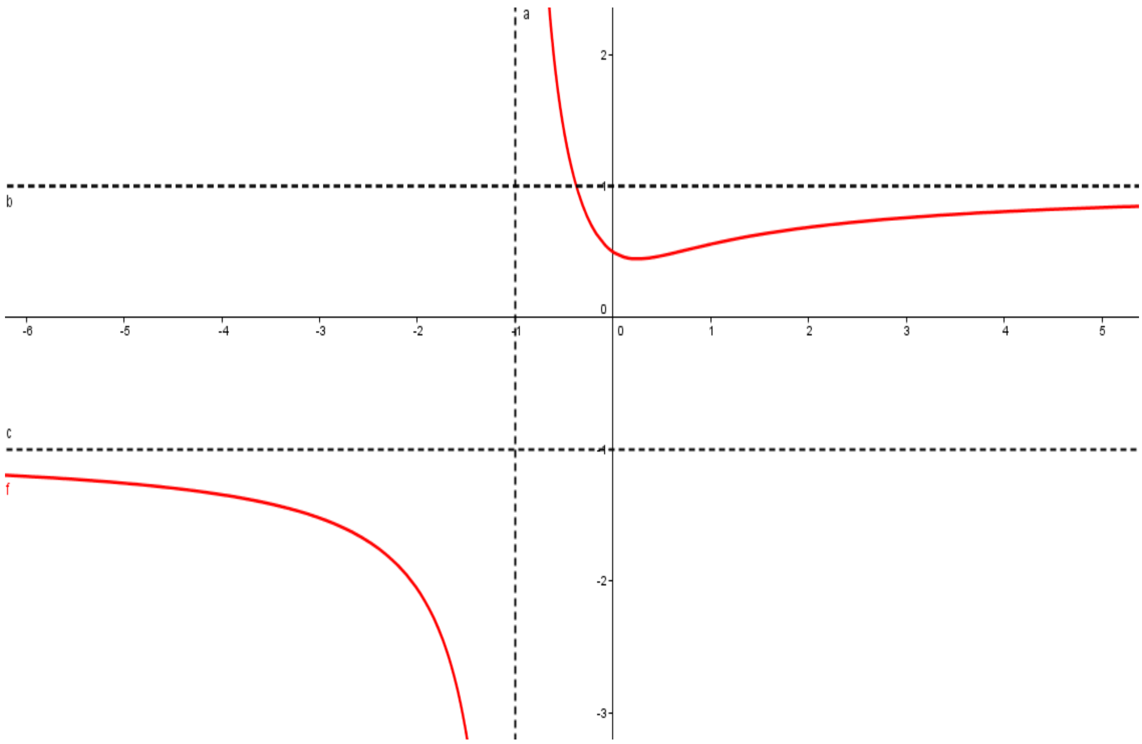
$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{\frac{4x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}}{\frac{-2x}{x}+\frac{2}{x}} = (simplificar) = \lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x^2}}}{-2+\frac{2}{x}} = \frac{\sqrt{4+0}}{-2+0} = \frac{2}{-2} = -1$$

Existe AH $y=-1$ si x tiende a menos infinito.

Llegamos a la conclusión de que existen dos asíntotas horizontales: $y=\pm 1$.

Al existir asíntotas horizontales, no existen asíntotas oblicuas.

$$Gráfica\ \ de\ f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2}\ y\ asíntotas$$



6. Sea la función definida por $f(x)=\frac{3x^4+1}{x^3}$ **para** $x\neq 0$ **. Estudia las asíntotas de la gráfica de la función.**

Estamos ante un cociente de polinomios, por lo tanto la función es continua en toda la recta real excepto donde se anule el denominador. Es decir, para $x=0$ la función no está definida y no es continua en ese punto. Vamos a comprobar si hay una asíntota vertical.

$\lim\limits_{x-0-}\frac{3x^4+1}{x^3}=\frac{1}{0-}=-\infty$, $\lim\limits_{x-0+}\frac{3x^4+1}{x^3}=\frac{1}{0+}=+\infty$ → Hay una asíntota vertical en $x=0$.

Como el numerador tiene un grado mayor que el denominador, $f(x)$ tiene una asíntota oblicua del tipo $y=mx+n$. Por lo tanto no tendrá asíntota horizontal.

Al ser cociente de polinomios la AO en más infinito coincide con la AO en menos infinito.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m(m\ finito\ y\neq 0) \quad\to\quad m=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^4+1}{x^3}}{x}=\frac{3x^4+1}{x^4}=3 \quad\to\quad m=3$$

Donde hemos razonado que el resultado del límite coincide con el cociente de coeficientes de las máximas potencias.

$$\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n \quad\to\quad n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^4+1}{x^3}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^4+1-3x^4}{x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}=\frac{1}{\infty}=0 \quad\to\quad n=0$$

Por lo tanto hay una asíntota oblicua en $y=3x$.