* Lösungen zu (iii) und (iv)

1. Aufgabe

a) Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, falls möglich.

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^2}) = 0$

Begründung: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n}) \overset{(iii)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n})\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0\cdot 0 = 0$

b) Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{1}{n^k}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ für $k \geq 1$, falls möglich.

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n^k}) = 0$

Begründung: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}\cdot\underset{k\ mal}{\cdots}\cdot\frac{1}{n}) \overset{(iii)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n})\cdot\underset{k\ mal}{\cdots}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{1}{n}) = 0\cdot\underset{k\ mal}{\cdots}\cdot 0 = 0$

(Beweis per Induktion möglich)

c) Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{n+1}{n}\cdot n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, falls möglich.

Diese Folge lässt sich nicht als Produkt zweier konvergenter Folgen schreiben. $\frac{n+1}{n}$ mag zwar konvergent sein, aber n ist es nicht. **Es darf hier keine Rechenregel für Grenzwerte angewendet werden**.

Da $(n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist und $\frac{n+1}{n}\cdot n > n \ \forall n\in\mathbb{N}$, ist auch $\left(\frac{n+1}{n}\cdot n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

d) Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{n+1}{n}\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, falls möglich.

$\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n}\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{n}) = 0$

Begründung: $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n}\cdot(-1)^n\cdot\frac{1}{n}) \overset{(iii)}{=} \lim\limits_{n\to\infty}(\frac{n+1}{n})\cdot\lim\limits_{n\to\infty}((-1)^n\cdot\frac{1}{n}) = 1\cdot 0 = 0$

2. Aufgabe

Untersuche die nachfolgenden Folgen auf Konvergenz und bestimmte gegebenenfalls den Grenzwert.

a) Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, falls möglich.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}\right) = \frac{2}{3}$

Begründung: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}\right) \overset{(iv)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\frac{4}{n}} = \frac{2}{3}$

b) Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, falls möglich.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right) = \frac{2}{3}$

Begründung: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+4}\right) \overset{kürzen}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2+\frac{3}{n}}{3+\frac{4}{n}}\right) \overset{(iv)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 2+\frac{3}{n}}{\lim\limits_{n\to\infty} 3+\frac{4}{n}} = \frac{2}{3}$

c) Was fällt dir bei a) und b) auf?

Die Folgen haben den gleichen Grenzwert, denn die Folge in a) entsteht durch Kürzen der Folge in b) mit n. <u>ACHTUNG</u>: In a) können die Grenzwertregeln direkt angewendet werden, in b) muss erst gekürzt werden, damit die Teilfolgen konvergent sind. Das ist nämlich die Bedingung, um die Regeln anzuwenden!

d) Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{3^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, falls möglich.

Diese Folge lässt sich nicht als Produkt zweier konvergenter Folgen schreiben. **Es darf hier keine Rechenregel für Grenzwerte angewendet werden**.

Mögliche Umformung: $\left(\frac{3^n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(\frac{3}{2}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Da $\left|\frac{3}{2}\right| > 1$ ist die Folge divergent.

e) Bestimme den Grenzwert von $\left(\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$, falls möglich.

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}\right) = -1$

Begründung: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2^n+3^n}{2^n-3^n}\right) \overset{kürzen}{=} \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\frac{2^n}{3}+1}{\frac{2^n}{3}-1}\right) \overset{(iv)}{=} \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3}+1}{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^n}{3}-1} \overset{(*)}{=} \frac{1}{-1} = -1$

Zu $(*)$: Hier wurde benutzt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ für $|q| < 1$, $q \in \mathbb{R}$ ist.

Da $\left|\frac{2}{3}\right| < 1$ konvergieren die Teilfolgen.