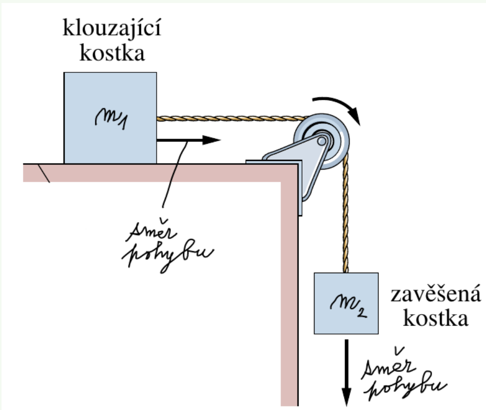
Oživlé příklady z KABARA I.

https://www.geogebra.org/m/mzypchq6

KABAR-I-75 (O dvou kostkách na provaze – upravené zadání)

Obrázek znázorňuje kostku (*klouzající kostka*) o hmotnosti $m_1 = 10\,\mathrm{kg}$.



Obr. 1

Kostka je připojena nehmotným provazem vedeným přes nehmotnou kladku otáčející se bez tření k jiné kostce (*zavěšená kostka*), jejíž hmotnost je $m_2 = 5\,\mathrm{kg}$. **Víme, že zavěšená kostka klesá a klouzající kostka se pohybuje vpravo.** Hodnotu tíhového zrychlení berte $g = 10\,\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}$.
Určete **velikost** a **směr** zrychlení kostek a **velikost síly, kterou je napínán provaz**, jestliže *koeficient smykového tření* mezi klouzající kostkou a podložkou je

a) $f = 0$
b) $f = 0,2$

c) $f = 0,5$
d) $f = 0,8$

KABAR-I-75 (O dvou kostkách na provaze – upravené zadání)

$$a = \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$T = \frac{m_1(1+f)}{m_1 + m_2} \cdot \underbrace{m_2 g}_{F_{G2}}$$

a)

$f = 0$ | $a = 3{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ | $T = 33{,}3\,\mathrm{N}$

b)

$f = 0,2$ | $a = 2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ | $T = 40\,\mathrm{N}$

c)

$f = 0,5$ | $a = 0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ | $T = 50\,\mathrm{N}$

d)

$f = 0,8$ | $a = -2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ | $T = 60\,\mathrm{N}$

1 Rozbor

Víme, že klouzající kostka se **pohybuje doprava** a je tažena **tíhovou silou**, která působí na zavěšenou kostku. Pač provaz je **pevný** (nemůže se natahovat ani zkracovat), budou velikosti *rychlostí* i *zrychlení* obou kostek **stejné**.

Pokud je **tření nulové** (případ $f = 0$), jedná se jistě o zrychlený pohyb a vektor zrychlení míří **ve směru pohybu**.

Pokud však **tření není nulové**, potom třecí síla $\overrightarrow{F_t}$ působí proti pohybu a proti působení tíhové síly $\overrightarrow{F_{G2}}$.

Mohou nastat 3 případy:

1. Bude-li $F_{G2} > F_t$, vítězí gravitace a soustava kostek bude **zrychlovat** (jako když v autě šlápneme na plyn a síla motoru zvítězí nad silou odporovou). Vektor zrychlení bude tedy opět mířit **ve směru pohybu**, ale bude menší než v případě bez tření.

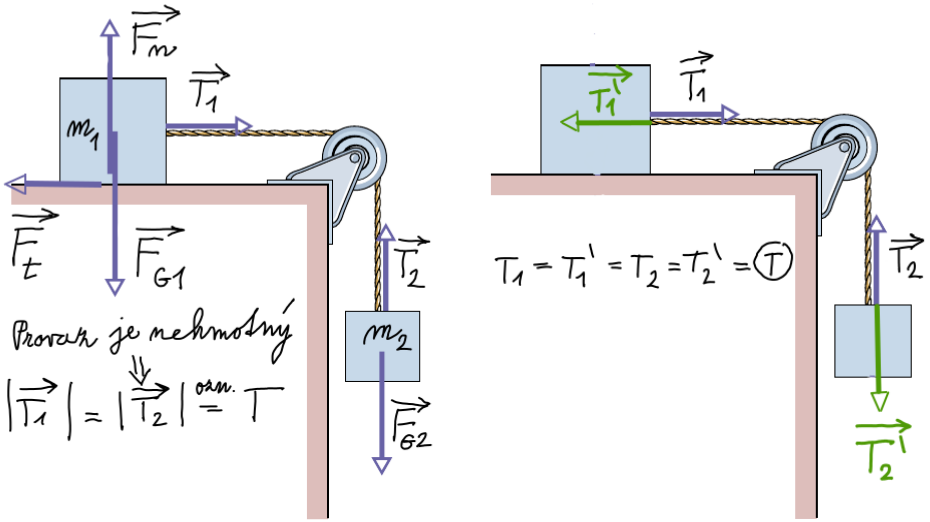
2. Bude-li $F_{G2} = F_t$, **zrychlení bude nulové** a kostky se budou pohybovat **rovnoměrně** (jako když v autě nastavíme plyn tak, aby síla motoru byla rovna síle odporové).

3. Bude-li $F_{G2} < F_t$, vítězí tření a soustava kostek bude **zpomalovat** (jako když v autě ubereme plyn a síla odporová zvítězí nad silou motoru). Vektor zrychlení bude tedy nyní mířit **proti směru pohybu**.

2 Síly

Do obrázku 2a zakreslíme všechny síly působící na soustavu kostek.

Kostka 1: Ve vodorovném směru působí tíhová síla $\overrightarrow{F_{G1}}$ a tlaková síla podložky $\overrightarrow{F_n}$. V tomto směru se kostka nepohybuje, takže se tyto síly



(a) Síly na kostky

(b) Síly na provaz

Obr. 2: Síly světla!

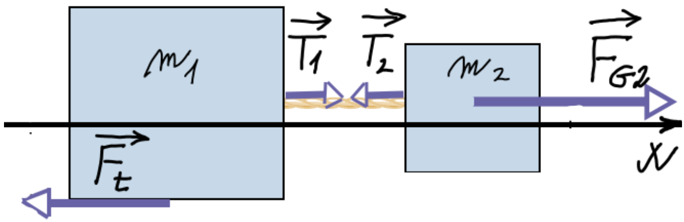
kompenzují. Ve vodorovném směru působí doprava tahová síla provazu $\vec{T_1}$ a doleva síla třecí $\vec{F_t}$.

Kostka 2: Ve svislém směru působí tíhová síla $\overrightarrow{F_{G2}}$ a tahová síla provazu $\vec{T_2}$.

Provaz: Provaz je vlastně třetí těleso (obr.2b), ale vzhledem k jeho nulové hmotnosti jakoby nebyl a jen zprostředkovává vazbu mezi kostkami. Síly $\vec{T_1}$ a $\vec{T_2}$, kterými provaz působí na kostky, mají k sobě reakce, $\vec{T_1'}$ a $\vec{T_2'}$, kterými naopak kostky působí na provaz.

Protože je provaz nehmotný, stačí k jeho urychlování nulová výslednice, takže síly $\vec{T_1'}$ a $\vec{T_2'}$ mají stejnou velikost. Dle zákona akce a reakce mají tutéž velikost i síly $\vec{T_1}$ a $\vec{T_2}$. Tedy všechny čtyři síly v obr.2b mají stejnou velikost, kterou označíme T.

Hodnota T je **velikost síly, kterou je napínán provaz** – a tu



Obr. 3: Napřímení provazu

chceme určit!

3 Napřímení provazu a souřadnice vektorů

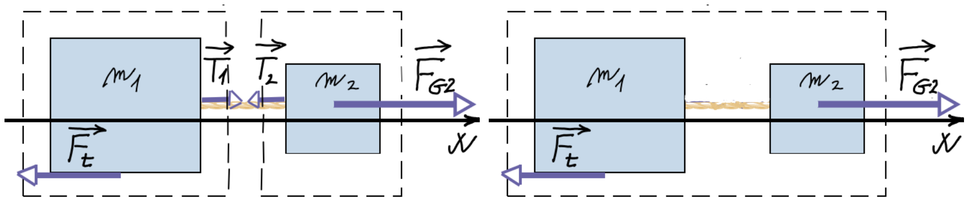
Situace v obr.2 je sice 2D (kostka 1 se pohybuje vodorovně a kostka 2 svisle), ale my si můžeme pomyslně provaz napřímit a dostaneme situaci 1D – viz obr.3.

Víme, že svislé síly na kostku 1 se kompenzují, proto již nejsou v obrázku zakresleny.

Rovněž nejsou zakresleny síly, které působí na provaz, protože provaz má nulovou hmostnost, jen propojuje kostky a do soustavy ho nezapočítáváme. Kromě toho se také kompenzují.

Nyní zavedeme souřadnou soustavu – vystačíme si jen s osou x ve směru pohybu. Všechny vektory sil mají v naší souřadné soustavě nyní směr osy x.

- Vektory, které mají orientaci souhlasnou s osou x (mířící **doprava**) mají souřadnici **kladnou**.
- Vektory, které mají orientaci nesouhlasnou s osou x (mířící **doleva**) mají souřadnici **zápornou**.



(a) Kostky jako 2 samostatná tělesa (b) Kostky jako jedno těleso

Obr. 4: Dvě možnosti použití zákona síly

Pro souřadnice vektorů v obrázku tedy platí:

$$\overrightarrow{F_t} = (-F_t) \quad \overrightarrow{T_1} = (+T) \quad \overrightarrow{T_2} = (-T) \quad \overrightarrow{F_{G2}} = (+F_{G2}) \tag{1}$$

Tyto souřadnice využijeme v dalším řešení, kdy použijeme **zákon síly**.

4 Řešení 1: Zákon síly použijeme na každou kostku zvlášť

Zákon síly zní $\overrightarrow{F_v} = \vec{a}m$, kde $\overrightarrow{F_v}$ je výslednice všech vnějších sil působících na těleso, $\vec{a}$ je jeho zrychlení a m jeho hmotnost.

Zákon použijeme na každou kostku zvlášť (obr.4a). Přitom víme, že obě kostky mají stejná zrychlení $\vec{a}$.

Kostka 1:

$$\overrightarrow{F_{v1}} = \vec{a} \cdot m_1$$
$$\overrightarrow{T_1} + \overrightarrow{F_t} = \vec{a} \cdot m_1$$

Nyní přejdeme od vektorů k souřadnicím, které máme připravené v (1):

$$\boxed{T - F_t = a \cdot m_1} \tag{2}$$

Kostka 2:

$$\overrightarrow{F_{v2}} = \vec{a} \cdot m_2$$
$$\overrightarrow{F_{G2}} + \overrightarrow{T_2} = \vec{a} \cdot m_2$$

Nyní přejdeme od vektorů k souřadnicím, které máme připravené v (1):

$$\boxed{F_{G2} - T = a \cdot m_2} \tag{3}$$

Dostali jsme soustavu dvou rovnic (2) a (3) pro dvě neznámé a a T. Sečtením rovnic dostáváme:

$$F_{G2} - F_t = a \cdot (m_1 + m_2) \tag{4}$$

Odtud máme pozoru-hodný vztah pro souřadnici zrychlení:

$$\boxed{a = \frac{F_{G2} - F_t}{m_1 + m_2}} \tag{5}$$

Sem ještě dosadíme známé vztahy $F_{G2} = m_2 g$ a $F_t = m_1 g f$ a dostáváme

$$\boxed{a = \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2} \cdot g} \tag{6}$$

Nyní z (3) vyjádříme T:

$$T = F_{G2} - a \cdot m_2$$
$$T = m_2 g - \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2} \cdot g \cdot m_2$$
$$T = m_2 g \left(1 - \frac{m_2 - m_1 f}{m_1 + m_2}\right)$$
$$T = m_2 g \left(\frac{m_1 + \cancel{m_2} - \cancel{m_2} + m_1 f}{m_1 + m_2}\right)$$

a odtud

$$\boxed{{\color{red}T} = \frac{m_1(1+f)}{m_1+m_2} \cdot \underbrace{m_2 g}_{F_{G2}}} \tag{7}$$

5 Řešení 2: Zákon síly použijeme na obě kostky najednou

V obr.5 je naznačeno čárkovaným rámečkem, že obě kostky budeme považovat za jedno těleso o hmotnosti m_1+m_2, na které uplatníme zákon síly. Síly $\overrightarrow{T_1}$ a $\overrightarrow{T_2}$ jsou nyní **vnitřní** síly, které nebudeme započítávat do výslednice (v zákonu síly pracujeme s výslednicí **vnějších sil**). Proto nejsou v obr. tyto síly zakresleny a výslednice je dána jen silami $\overrightarrow{F_t}$ a $\overrightarrow{F_{G2}}$. Dostáváme:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_v} &= \vec{a} \cdot (m_1 + m_2) \\ \overrightarrow{F_{G2}} + \overrightarrow{F_t} &= \vec{a} \cdot (m_1 + m_2) \end{aligned}$$

Nyní přejdeme od vektorů k souřadnicím, které máme připravené v (1):

$$F_{G2} - F_t = {\color{red}a} \cdot (m_1 + m_2) \tag{8}$$

Tím jsme ale dostali rovnici (4), ze které již plyne vztah pro souřadnici zrychlení (6). Nyní stačí použít zákon síly na kteroukoli z kostek – např. na kostku 2 a dostaneme stejně jako v řešení 1 vztah (3), z něhož vyvodíme stejným postupem vztah (7) pro T.

6 Číselné řešení

a) $\boxed{f = 0}$ Toto je situace bez tření.

Nejprve do vztahů (6) a (7) dosadíme jen za za f. Dostáváme

$$\boxed{a = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \cdot g} \tag{9}$$

Vidíme, že $a > 0$ (uvědomme si, že a je **souřadnice** vektoru, nikoli jen velikost, takže může být i záporné), což odpovídá tomu, že vektor zrychlení míří ve směru pohybu a soustava zrychluje. Protože zřejmě platí

$$\frac{m_2}{m_1 + m_2} < 1$$

je

$$a < g$$

a kostka 2 padá s menším zrychlením než při volném pádu (je bržděna kostkou 1). Pro m_1 nulové vychází samozřejmě $a = g$. Dále dostáváme pro napětí provazu

$$\boxed{T = \frac{m_1}{m_1 + m_2} \cdot \underbrace{m_2 g}_{F_{G2}}} \tag{10}$$

Protože zřejmě platí

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2} < 1$$

je

$$T < F_{G2}$$

a provaz je napínán menší silou, než kdyby soustava byla v klidu. Pro $m_1 = 0$ je samozřejmě $T = 0$. A pro $m_1 \to \infty$ se zřejmě blíží a k nule a T k F_{G2}.
Ještě dosadíme za hmotnosti kostek $m_1 = 10\,\mathrm{kg}, m_2 = 5\,\mathrm{kg}$:

$$a = \frac{5}{10+5} \cdot g = \frac{g}{3} \doteq \underline{\underline{3{,}33\,[\mathrm{m \cdot s^{-2}}]}}$$

$$T = \frac{10}{10+5} \cdot 5 \cdot 10 = \frac{2}{3} F_{G2} \doteq \underline{\underline{33{,}33\,[\mathrm{N}]}}$$

b) $\boxed{f = 0,2}$ Do vztahů (6) a (7) dosadíme za f i za m_1, m_2:

$$a = \frac{5 - 10 \cdot 0,2}{10 + 5} \cdot g = \frac{g}{5} = \underline{\underline{2\,[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}]}}$$

$$T = \frac{10(1 + 0,2)}{10 + 5} \cdot 5 \cdot 10 = \frac{4}{5} F_{G2} = \underline{\underline{40\,[\mathrm{N}]}}$$

Souřadnice vektoru zrychlení a je stále **kladná**, ale menší než v případě bez tření.
Napětí provazu se oproti případu bez tření zvětšilo, ale stále je menší než F_{G2}.

c) $\boxed{f = 0,5}$ Do vztahů (6) a (7) dosadíme za f i za m_1, m_2:

$$a = \frac{5 - 10 \cdot 0,5}{10 + 5} \cdot g = \underline{\underline{0\,[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}]}}$$

$$T = \frac{10(1 + 0,5)}{10 + 5} \cdot 5 \cdot 10 = F_{G2} = \underline{\underline{50\,[\mathrm{N}]}}$$

Zrychlení je nulové, takže soustava se pohybuje **rovnoměrně přímočaře**.
Napětí provazu je rovno F_{G2}, je tedy stejné, jako kdyby soustava byla v klidu. To je v souladu s *Galileovým principem relativity* – mezi klidem a *RPP* není žádný fysikální rozdíl!

d) $\boxed{f = 0,8}$ Do vztahů (6) a (7) dosadíme za f i za m_1, m_2:

$$a = \frac{5 - 10 \cdot 0,8}{10 + 5} \cdot g = -\frac{g}{5} = \underline{\underline{-2\,[\mathrm{m} \cdot \mathrm{s}^{-2}]}}$$

$$T = \frac{10(1 + 0,8)}{10 + 5} \cdot 5 \cdot 10 = \frac{6}{5} F_{G2} = \underline{\underline{60\,[\mathrm{N}]}}$$

Souřadnice zrychlení a je **záporná**, takže vektor zrychlení míří **proti pohybu** a soustava **brzdí** (a po chvíli se kvůli tření zastaví).
Tření vítězí nad gravitací.

Napětí provazu je větší než F_{G2}, je tedy **větší než kdyby soustava byla v klidu**. (Je to stejné jako když výtah klesá dolů a v přízemí zastavuje – lana výtahu jsou zatížena víc než v klidu nebo v RPP – a hrozí jejich přervání.)

7 Závěr

Zrychlení: Klouzající (padající) kostka se pohybuje doprava (dolů), ale to ještě neznamená, její zrychlení míří také doprava (dolů) – může mířit i doleva (nahoru) nebo být nulové. Ze vztahu (6) vidíme, že znaménko souřadnice a závisí na hodnotě výrazu v porovnání s **nulou**:

$$\begin{aligned} m_2 - m_1 f &\gtreqqless 0 \\ m_2 &\gtreqqless m_1 f \\ \frac{m_2}{m_1} &\gtreqqless f \end{aligned}$$

Souřadnice a bude

- **kladná** (zrychlování) pro $\frac{m_2}{m_1} > f$.
- **nulová** (RPP) pro $\frac{m_2}{m_1} = f$.
- **záporná** (brždění) pro $\frac{m_2}{m_1} < f$.

Napětí provazu: Provaz může být napínán silou menší, stejnou i větší F_{G2} (tedy než v klidu). Ze vztahu (7) vidíme, že to závisí na hodnotě zlomku v porovnání s **jedničkou**:

$$\begin{aligned} \frac{m_1(1+f)}{m_1+m_2} &\lesseqqgtr 1 \\ m_1(1+f) &\lesseqqgtr m_1 + m_2 \\ \cancel{m_1} + m_1 f &\lesseqqgtr \cancel{m_1} + m_2 \\ \frac{m_2}{m_1} &\gtreqqless f \end{aligned}$$

Napětí T provazu bude

- **menší** než F_{G2} pro $\frac{m_2}{m_1} > f$.
- **rovné** F_{G2} pro $\frac{m_2}{m_1} = f$.
- **větší** než F_{G2} pro $\frac{m_2}{m_1} < f$.