Zwischen Zeichnung und Theorie – Geometrielernen mit DGS

Colette Laborde, Grenoble

This article is based on the idea that solving a geometry problem requires numerous and flexible moves between diagrams and theory. It is shown how some learning situations based on the use of a DGS, namely Cabri-géomètre, can be designed in order to foster this flexibility. With the help of four theoretical frameworks (a-didactical situations, instrumentation, semiotic mediation, situated abstraction) it will be shown how knowledge about geometry, spatial recognition and knowledge about the DGS are intrinsically mixed in the solving processes and can grow in interaction.

1 Theoretische Betrachtungen und Unterscheidungen

Offensichtlich werden in der Geometrie mindestens zwei Zeichensysteme benutzt, nämlich die Sprache (natürliche und eventuell symbolische Schrift) und die Zeichnungen. Duval (1998), der diese Zeichensysteme Register nennt, hat betont,

- wie die Übergänge zwischen verschiedenen Registern zum Lernen von Mathematik im allgemeinen beitragen,
- wie in dem spezifischen Bereich der Geometrie die Verarbeitung der Zeichnungen eine kritische Rolle bei der Problemlösung spielt.

Für die Geometrie werden nun zwei Typen von Kenntnissen unterschieden, die in enger Beziehung zueinander stehen: die geometrischen Kenntnisse und die räumliche Kenntnisse (Sträßer 1990). Einerseits ist die Geometrie "eine in der Gesellschaft verbreitet genutzte Technik zur Planung, Herstellung und Kontrolle von Produktion und Distribution". Andererseits ist sie (als Teilgebiet der Wissenschaft Mathematik) "ein Gefüge logischer Relationen über einer Grundmenge. Dieses Gefüge logischer Relationen stammt zwar historisch aus der Analyse des uns umgebenden Raumes, hat aber schon vor Jahrtausenden im klassischen Griechenland begonnen, diesen Ursprung abzustreifen, und ist heute ein Lexikon vielfältig einsetzbarer Begriffe, welches in höchst unterschiedlichen Teilgebieten der Wissenschaft Mathematik genutzt wird" (vgl. Sträßer in diesem Band).

Theoretische Objekte und Relationen der Geometrie werden anhand von Zeichnungen oder Formulierungen ausgedrückt. Während die Formulierungen Begriffe der Geometrie benutzen, erfüllen die Zeichnungen der Geometrie die Rolle, räumliche Objekte und Relationen darzustellen. Diese Komplementarität der beiden Register kann bei der Lösung von geometrischen Problemen mit Gewinn genutzt werden. Zeichnungen rufen eine globale Wahrnehmung hervor, während die Formulierungen ein analytisches Erfassen und Durchdringen des Problems erfordern. Die Zeichnungen können Einfälle fördern, welche danach auf der theoretischen Ebene zu begründen sind. Umgekehrt können die Ergebnisse einer theoretischen Begründung empirisch mit Hilfe einer Zeichnung geprüft werden.

Diese Komplementarität stammt von einer fehlenden Kongruenz zwischen den beiden Registern, oder präziser: die Verschiedenheit der Formulierungen der theoretischen Objekte und der räumlichen Relationen, welche durch die Zeichnungen ausgedrückt werden, kann beim Lösen geometrischer Probleme ausgenutzt werden. Bekanntermaßen können theoretische Relationen nicht unmittelbar aus einer Zeichnung abgelesen werden, während eine Zeichnung räumliche Besonderheiten besitzen kann, welche vom Standpunkt der Geometrie aus nicht unbedingt relevant sind. Genau wegen dieser fehlenden Kongruenz kann die Komplementarität der verschiedenen Register fruchtbar werden:

- Die Geometrie erlaubt es, räumliche Probleme in effektiver Weise zu lösen.
- Die Zeichnungen erlauben visuelle operative Verarbeitungen, die Unterkonfigurationen hervorheben oder zusammenstellen (Duval 1998).

Wenn Beziehungen zwischen dem theoretischen Objekt und ihren möglichen Zeichnungen vom Subjekt konstruiert werden, nennen wir diese mentale Konstruktion eine Figur, indem wir der Theorie der "figural concepts" von Fishbein (1993) folgen. Dabei wird es leichter, den Begriff Figur zu fassen, sobald man die allzu vertraute euklidische Geometrie verläßt. Die Objekte der hyperbolischen Geometrie werden mit theoretischen Formulierungen ausgedrückt, aber durch Modelle der euklidischen Geometrie dargestellt: eine hyperbolische Gerade kann zum Beispiel im Poincaré-Modell als ein Kreisbogen dargestellt werden. Die analoge Beziehung, die in der euklidischen Geometrie zwischen den Zeichnungen und den Objekten der Theorie vom Subjekt unbewußt hergestellt wird, funktioniert in diesem Fall nicht mehr. Die mentalen Operationen zum Aufbau dieser Beziehung werden bewußt und sogar explizit ausgedrückt. Sehr oft werden solche Zeichnungen hyperbolischer Geometrie zunächst als Zeichnungen der euklidischen Geometrie aufgefaßt, um dann nach einer theoretischen Arbeit als Darstellungen der hyperbolischen Objekte interpretiert zu werden. Nur eine Vertrautheit mit der hyperbolischen Geometrie erlaubt es, eine direkte Beziehung zwischen Zeichnungen des Modells und den Objekten der Theorie herzustellen oder anders gesagt, den Begriff Figur in der hyperbolischen Geometrie zu konstruieren.

2 Das Lernen von Geometrie

Natürlich ist es für einen Anfänger, etwa Schüler der Primarstufe oder am Anfang der Sekundarstufe I, besonders schwer zu verstehen, dass die Formulierungen auf theoretische Objekte hinweisen, während die Zeichnungen nur Darstellungen von diesen Objekten sind. Dies ist besonders offensichtlich bei den Konstruktionsproblemen, für welche der Lehrer einen theoretisch begründeten Konstruktionsprozess erwartet, während die Schüler oft eine räumliche oder visuelle Lösung angeben. Für den Lehrer ist dann eine Begründung schwer anzugeben, warum diese Lösung nicht gültig ist, während die Lösung doch visuell perfekt aussieht. Ähnliche Probleme kommen beim Erlernen des Beweisens vor. Der Lehrer erwartet einen Beweis, der auf theoretischen Argumenten beruht und der Schüler "liest" Eigenschaften aus der Zeichnung, die er als Elemente des Beweises nimmt. Der Eintritt in den didaktischen Vertrag der Geometrie, der einen Unterschied zwischen Zeichnung und Theorie setzt, ist eine wohlbekannte Schwierigkeit des Geometrie-Unterrichts. Dies ist um so schwieriger, als dieser Vertrag nicht immer rational verständlich ist! Für einige Informationselemente ist es erlaubt, sie aus der Zeichnung zu entnehmen, wie z.B. die Anordnung von kollinearen Punkten (Arsac 1997, Laborde 1999).

Eine gewisse Lockerung des didaktischen Vertrags erlauben a-didaktische Situationen (Brousseau 1997), die darauf beruhen, dass das Milieu teilweise die Rolle des Lehrenden übernimmt, indem es rein visuelles Vorgehen bei der Problemlösung als unangemessen qualifiziert.

In der Theorie der didaktischen Situationen wird das Lernen als das Ergebnis einer Adaptation des Schülers an eine problematische Situation betrachtet, in welcher er neue Mittel der Problemlösung aufbauen muss. Eine solche Situation wird von Brousseau als a-didaktisch benannt, da sie von den Schülern als ein echtes Problem erlebt wird und nicht als eine Schulsituation, in welcher sie die Erwartungen des Lehrers erfüllen müssen. Die didaktischen Intentionen des Lehrers sind in a-didaktischen Situationen für die Schüler nicht sichtbar. Brousseau beschreibt die verschiedenen Etappen der Problemlösung als Interaktionen zwischen zwei Systemen, dem Schüler und dem Milieu, das dem Schüler gegenüber steht bzw. ihm entgegengesetzt wird. Der Schüler erhält vom Milieu in verschiedenen Formen Rückmeldungen, die Information über die Gültigkeit seiner Lösung bringen können.

Eine naheliegende Reaktion, damit sich die Schüler die neuen Erwartungen des Geometrieunterrichts aneignen, besteht darin, ein geeignetes Milieu zu schaffen, das den Schülern echte Probleme anbietet, für welche theoretische Kenntnisse effektive Lösungsmittel sind. Hierzu wurden mehrere Versuche gemacht (Arsac 1997, Grenier 1988, Salin & Berthelot 1994), die zeigen, dass die Schaffung eines in diesem Sinne geeigneten "Milieu" nicht einfach ist. Als Beispiel soll hier eine Aufgabe für Schüler des sechsten Klasse (11-12 jährige Schüler) über Achsensymmetrie vorgestellt werden (vgl. Grenier 1988).

Konstruiere die Symmetrieachse des gegebenen Trapezes nur mit Lineal und Zeichendreieck, ohne zu messen.

(Auf einem Blatt Papier war eine Zeichnung eines gleichschenkligen Trapezes gegeben, vgl. nebenstehende Abbildung 1).

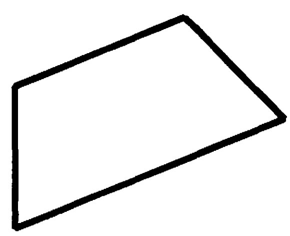


Abb. 1

Die Schüler haben die Aufgabenstellung als echtes Problem angenommen und versucht, die Lage der Mittelpunkte der parallelen Seiten mit verschiedenen Verfahren zu schätzen. Insbesondere benutzten sie dazu den quadratischen Querschnitt ihres Lineals als neue Maßeinheit und meinten so, der Forderung des Lehrers zu genügen. Für sie bestand die Aufgabe darin, die Symmetrieachse der Zeichnung mit irgendeinem Verfahren (außer traditionellem Messen, weil der Lehrer dies aus unerklärlichen Gründen verboten hatte) zu finden. Sie waren nicht daran interessiert, ein allgemeines Verfahren zu finden, welches für alle gleichschenkligen Trapeze gilt. Der Lehrer wiederum konnte nicht erklären, warum die Schülerlösungen für ihn nicht akzeptabel waren, weil sie mathematisch nicht falsch waren. Entsprechend monierte er nur, dass das Verfahren der Schüler nicht präzise genug war. Für den Lehrer garantierte die Theorie die "beste" Präzision. Die Schüler interpretierten das Problem auf der Ebene der Zeichnung und suchten bessere Schätzverfahren. Es war ein großes Missverständnis. Die Schüler hatten nicht das vom Lehrer intendierte Problem gelöst. Mit der Terminologie der französischen Mathematikdidaktik: Es fand kein "Devolutionsprozess" statt; das Wissen der Schüler hat sich nicht weiter entwickelt.

Man könnte aus dieser Lehrepisode folgern, man müsse expliziter mit den Schülern über den neuen Vertrag der Geometrie zu sprechen, obwohl ein solches Vorgehen den a-didaktischen Charakter der Situation vermindern würde. In Bezug auf die obige Situation war der Lehrer im nächsten Jahr expliziter in seinen Erwartungen, indem er erklärte, dass er Verfahren mit Geraden und Schnittpunkten von Geraden erwartete. Er hatte also die Regel der euklidischen geometrischen Konstruktionen explizit ausgedrückt. Es hat den Anschein, als erfordere der Eintritt in eine theoretische Problematik eine gewisse Explizitheit. Das didaktische Problem liegt dann darin, wieweit der Lehrer explizit sein soll, um andererseits einen "Topaze-Effekt" (vgl. Brousseau 1997, S.25) zu vermeiden oder wenigstens in Grenzen zu halten.

Die Dynamischen Geometrie-Systeme scheinen nun eine Möglichkeit zu bieten, um für die Schüler eine gewisse Explizitheit der theoretischen Forderungen aus der Umgebung, aus dem "Milieu" heraus sichtbar zu machen. Der Lehrer stellt dann die theoretischen Anforderungen nur indirekt. In den folgenden Abschnitten möchten wir die Möglichkeiten der DGS für ein a-didaktisches Milieu im Geometrie-Unterricht untersuchen. Dabei werden theoretische Überlegungen mit Beispielen aus empirischen Untersuchungen illustriert.

3 Geometrie-Lernen mit DGS

3.1 Dynamische Geometrie-Software

Seit rund 15 Jahren sind in verschiedenen Ländern Programme entwickelt worden, die man als Dynamische Geometrie-Software bezeichnen kann. Diese DGS verwirklichen einen Teil des Wechselspiels zwischen visuell-graphischen Eindrücken und geometrischen Eigenschaften mit Hilfe direkter Manipulation. Auf dem Bildschirm von Computern oder Taschenrechnern werden graphische Darstellungen erzeugt,

- die Ergebnis einer Folge von Operationen sind, die in geometrischen Begriffen beschrieben werden,
- die man in direkter Manipulation mit der Maus bewegen kann (genannt: "Zugmodus"),
- deren Verhalten im Zugmodus durch eine geometrische Theorie kontrolliert wird, die diesen DGS zugrunde liegt. Geometrische Relationen, die (direkte oder indirekte) Folge der Konstruktionsvorschrift sind, bleiben nämlich beim Ziehen erhalten.

In der Reihenfolge ihres Auftretens wären Cabri-géomètre, Geometer's Sketchpad, Thales, Cinderella und Geometry Inventor zu nennen.

Dieses Verhalten der DGS hat aber zur Folge, dass die graphischen Darstellungen auf dem Bildschirm nicht notwendig den Erwartungen und Wünschen ihres Autors folgen, sondern durch die zugrundeliegende Geometrie gesteuert werden. Sie folgen - ähnlich wie die Objekte der realen Welt - den Gesetzen der Geometrie und nicht notwendig den Wünschen ihres Schöpfers. Ihre Beobachtung und Analyse können also zu Vermutungen bzgl. der geometrischen Relationen führen, denen die entsprechenden geometrischen Objekte folgen. Insbesondere sind visuell-graphische Invarianten gute Kandidaten für geometrische Relationen. Diese Programme schaffen also typischerweise Verbindungen zwischen den beiden oben benannten Registern der Geometrie.

Für Cabri-géomètre als der in unserer Forschungsumgebung entstandenen DGS (Laborde 1985), mit der wir zahlreiche Experimente in und außerhalb von Klassenzimmern gemacht haben, ist nun typisch, dass diese spezielle DGS in hohem Maße die Konfiguration der zur Verfügung stehenden Werkzeuge durch den Nutzer bzw. den Lehrenden erlaubt. Neben der (auch in anderen DGS vorhandenen) Makro-Funktionalität sind hier die Anpassung des Menüs an die Bedürfnisse des Nutzers und die Um-Definition von bereits konstruierten Zeichenelementen hervorzuheben, die es erlauben, Beziehungen zu anderen bereits vorhandenen Zeichenelementen zu verändern. Man hat es also mit einem äußerst flexiblen Programm zu tun, das beispielsweise vollständig neu konfiguriert werden kann und (eventuell: nur) die Konstruktion von Geraden, Kreisen, Senkrechten und Loten in einem Modell der hyperbolischen Geometrie erlaubt, etwa dem von Poincaré oder Klein (vgl. etwa die Mikrowelt von Lister 1998 im Internet). Ein solches Programm ist aufgrund dieser Operationen "zweiter Ordnung" unendlich erneuerbar und wird zu einer Fabrik immer neuer Programme. Wegen dieser Möglichkeiten, höchst verschiedene Objekte und Operationen immer wieder neu zu schaffen, kann man ein solches Programm auch als eine Mikrowelt im Sinne der Kognitionswissenschaften ansehen.

3.2 Geometrie-Lernen mit Unterstützung von DGS

Folgende Aufgabe wurde in zahlreichen Experimenten von der 8. Klasse (Alter der Lernenden: 13 - 14 Jahre) bis in die Universität hinein gestellt - und zwar mit mittelmäßigen bis (auch in der Hochschule) schwachen Ergebnissen:

In einem rechtwinkligen Dreieck ABC mit rechtem Winkel bei A liegt der Punkt P auf der Hypotenuse [BC]. I und J sind die Lotfußpunkte der Senkrechten von P auf [AB] und [AC]. Bei welcher Lage von P ist die Strecke [IJ] am kürzesten ?

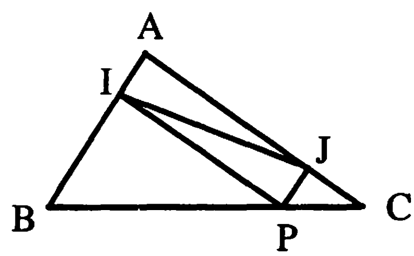


Abb. 2

Mindestens ein Grund für die Schwierigkeit dieser Aufgabe in einer traditionellen Zeichenumgebung mit Papier und Bleistift liegt wohl darin, dass das Rechteck AIPJ, der Schlüssel zur Problemlösung, nicht sofort ins Auge springt. Lernende, die dieses Rechteck nicht "sehen" und nicht die rechten Winkel aus der Aufgabenstellung ausnutzen, sind blockiert. Als Folge des üblichen "didaktischen Vertrages" müßte P im Lösungsfall eine besondere Lage einnehmen, deshalb versuchen sie zu zeigen, dass P als Mittelpunkt der Strecke [BC], als auf diese Weise besonders liegender Punkt, die Strecke [IJ] minimiert.

Während der Experimente mit den Schülern der 8. Klasse (vgl. Capponi&Laborde 1995) konnten wir feststellen, dass die Schüler das Rechteck nur beim Ziehen des Punktes P bemerkten, weil es dann als Invariante der Veränderung der Zeichnung sichtbar wird. Dann entdecken die Schüler wieder - zum Teil mit Erstaunen - dass die rechten Winkel bereits in der Aufgabenstellung vorgegeben sind. Visuelle Eindrücke bringen sie also wieder zurück auf die textliche Darstellung der Aufgabe, es bedarf dieses Rückgriffs auf das Text-Register - und dieses wird im Gegensatz zur traditionellen Papier&Bleistift-Umgebung durch den Programmeinsatz möglich. Folglich muß man befürchten, dass Anfänger, die das kontrollierte Wechselspiel zwischen zeichnerisch-graphischer Darstellung und theoretischer Geometrie noch nicht beherrschen, die Verstärker-

Wirkung dieser Programme bezüglich der Visualisierung räumlicher Eigenschaften noch nicht vollständig nutzen können.

Für den Lehrenden folgt daraus ein didaktisches Interesse an diesen Programmen in Bezug auf drei Aspekte des Lernens: in Bezug auf die Geometrie als theoretische Wissenschaft, in Bezug auf das Wechselspiel zwischen zeichnerisch-graphischen Darstellungen und der Theorie und in der Nutzung der Möglichkeiten des Programmes in Hinsicht auf die beiden genannten Zwecke. Damit stellt sich aber auch die Frage nach einer Reihenfolge der genannten Lernaspekte: Soll man zunächst einen von diesen Gesichtspunkten verfolgen? Und wie befördert man oder stellt man den Übergang in die immer noch legitime Papier&Bleistift-Umgebung her? Wir werden auf diese Fragen keine definitiven Antworten geben, aber drei theoretische Ansätze anführen, die Antworten auf diese Fragen ermöglichen sollten:
- die Theorie der Instrumentierung von Artefakten (Rabardel&Verillon),
- die Theorie der semiotischen Mediation (Vygotsky, Bartolini-Bussi, Mariotti),
- die Theorie der Computer-Mediation und der situierten Abstraktion (Noss&Hoyles).

3.3 Theoretische Ansätze zum Lernen mit Artefakten

3.3.1 Die Theorie der Instrumentierung von Artefakten

Vérillon&Rabardel (1995) haben eine Theorie der Nutzung von Artefakten in beruflichen Kontexten und für Lern-Situationen entwickelt. Artefakt ist dabei der materielle oder symbolische Gegenstand, der benutzt wird. Grundlegende Aussage dieses Ansatzes ist nun, dass die von Menschen genutzten Werkzeuge gegenüber der Bearbeitung der Aufgabe, gegenüber der Formulierung, der Darstellung dieser Aufgabe und gegenüber den mit der Bearbeitung verbundenen Vorstellungen nicht neutral sind. Sie stützen sich dabei auf psychologische Ansätze von Léontiev und Vygotsky, nach denen Instrumente Formen darstellen, die unsere Beziehungen zu Situationen und zum Wissen darüber vermitteln und strukturieren. Die Instrumente haben also einen bedeutsamen Einfluß auf unser Lernen (Léontiev 1984, Vygotsky 1930). Diese Hypothese passt ausgezeichnet zum Begriff des "milieu" wie es Brousseau entwickelt hat. Genauer wird das Artefakt nicht als solches durch den Nutzer wahrgenommen, sondern durch ihn entsprechend seinem (Vor-)Wissen konstruiert. Der Nutzer entwickelt gleichzeitig eine Vorstellung von dem Artefakt wie auch von den Strukturen, die ihm Aktivitäten mit dem Artefakt ermöglichen (Gebrauchsschemata für das Artefakt). Erst die Gesamtheit beider Konstruktionen strukturiert die Situationsauffassung des Nutzers und hat einen großen Einfluß auf die situationsbezogenen Vorstellungen und die Wissensentwicklung. Ein Instrument besteht also aus zwei Komponenten (vgl. Rabardel 1999; S.210):

- *einem Artefakt, sei es materiell oder symbolisch*
- *einem oder mehreren dem Artefakt zugeordneten Schema(ta) des Gebrauchs, welche(s) eine dem Subjekt eigene Konstruktion ist/sind. Diese sind autonom geschaffen oder gehen aus einer Aneignung sozialer Gebrauchsschemata hervor.*
  Ein Instrument ist also nicht gegeben, sondern muß vom Subjekt während der Genese des Instrumentes erarbeitet werden. Dieser Entstehungsprozeß bezieht sich sowohl auf das Artefakt wie auf die Gebrauchsschemata, er hat also zwei Dimensionen:

- *Die Instrumentierung bezieht sich auf die Herausbildung und die Entwicklung von Teilen des Artefaktes eines Instrumentes: Auswahl, Zusammenstellung, Herstellung und Festlegung von Funktionen, Veränderungen des Artefaktes (in Bezug auf Form und Funktionieren ...) die die anfängliche Schöpfung des Artefaktes fortsetzen,*
- *Die Instrumentierung steht in enger Beziehung zum Auftauchen und der Entwicklung von Gebrauchsschemata, ihrer Herausbildung, ihrem Funktionieren, ihrer Entwicklungsgeschichte wie auch der Einbeziehung von neuen Artefakten in bereits vorhandene Gebrauchsschemata. (Übersetzung R. Sträßer).*

3.3.2 Semiotische Mediation

In direkter Folge von Vygotsky und in den letzten 10 Jahren wiederaufgenommen in mathematikdidaktischen Forschungen vor allem in Italien (Bartolini-Bussi & Mariotti 1999) betrachtet dieser Ansatz die Rolle von Werkzeugen bei der Entwicklung höherer psychischer Funktionen des Menschen. Vygotsky unterscheidet zwei Arten von Werkzeugen: technische Werkzeuge und psychologische Werkzeuge, die er Zeichen nennt. Die ersteren haben vor allem nach außen orientierte Funktionen, sie zielen auf Handlungen zur Veränderung der Umgebung des Menschen ab. Demgegenüber orientieren sich die Funktionen der zweiten Art von Werkzeugen nach innen, sie zielen auf die Veränderung mentaler Konstruktionen des menschlichen Subjekts. Für Vygotsky ist nun ein Prozess der Transformation technischer Werkzeuge in solche psychologischer Art durch einen Prozeß der "Interiorisation" wichtig, der Grundlage neuer Vorstellungen und Begriffe ist. Dabei haben technische Werkzeuge eine vermittelnde Rolle. Ein solcher Prozess der Interiorisation kann sich beispielsweise beim Gebrauch des Abakus (der Abakus wurde im alten Rußland wie in der Ex-UdSSR vor dem Auftauchen von Taschenrechnern verbreitet benutzt) dann einstellen, wenn tatsächliche Aktivitäten auf dem Abakus durch solche in einem System von Zeichen (im semiotischen Register) ersetzt werden. Mit der Zeit gewinnt das Zeichensysteme an Autonomie, so dass es möglich wird, dieselben Operationen durchzuführen, ohne gedanklich auf den Gebrauch des Abakus zu rekurrieren.

Die Beziehung zu DGS - allgemeiner: zu rechnergestützten Umgebungen, die theoretisches Wissen beinhalten - ist offensichtlich. Nehmen wir ein Beispiel aus einem Experiment mit Cabri: Wenn Schüler der Primarschule oder am Beginn der Sekundarstufe eine Parallele zu einer gegebenen Geraden g durch einen Punkt P zeichnen sollen, müssen sie den Menüpunkt "Parallele" wählen. In Cabri endet damit aber nicht der Werkzeuggebrauch, man muß noch den Punkt P und die Gerade g auswählen, damit die Parallele bestimmt werden kann. Dies ist für diese Schüler nicht selbstverständlich, spontan wird nur ein Element, nicht beide gewählt (Argaud 1998) und nichts passiert. Der Schüler ist erstaunt, bewegt oft in seiner Verzweiflung den Mauscursor und klickt, sobald die Meldung "parallel zu dieser Geraden" bzw. "auf dieser Geraden" erscheint. Er ist nur zu zufrieden, das "Schweigen" der Maschine gebrochen zu haben.... Und wenn er dann auch noch zweimal die Gerade g angeklickt hat, verändert sich auf dem Bildschirm gar nichts, weil die Parallele dann mit der Geraden identisch ist. Dann ruft er den Lehrer zu sich....

Vom Schüler ist ein Gebrauchsschema für das Parallelen-Werkzeug zu entwickeln, welches die Bezeichnung beider Objekte einschließt, die die Parallele bestimmen. Ist dieses Gebrauchsschema einmal gebildet, kann der Lehrende bei der Behandlung der Parallelen im Unterricht diese beiden Bestimmungsstücke der Parallelen ansprechen und so die Interiorisation dieses Werkzeuges fördern. Der Lehrer hat sich dann des Werkzeuges Parallele im Sinne einer semiotischen Mediation bedient, damit sich die Lerner den funktionalen Charakter des Begriffs Parallele aneignen. Auf diese Weise kann bei DGS-Nutzung der funktionelle Charakters geometrischer Objekte, die von anderen Objekten abhängen, expliziert werden - und zwar besser als in der traditionellen Papier&Bleistift-Umgebung, wo er weniger sichtbar wird. DGS-Nutzung erlaubt dem Lehrenden so eher eine semiotische Mediation.

Der Prozess der Werkzeug-Genese im Sinne von Rabardel wird so vom Lehrenden in voller Absicht bei der semiotischen Mediation eingesetzt und durch sie unterstützt. Bartolini-Bussi und Mariotti zeigen im Übrigen die Notwendigkeit zahlreicher Interventionen des Lehrenden - wie auch die Notwendigkeit der Organisation kollektiver Diskussionen in der Klasse. Dabei verlässt man also das Reich der a-didaktischen Situationen und des Milieu im Sinne von Brousseau.

3.3.3 Mediation durch Computer und situierte Abstraktion

In der Instrumentierung von Rabardel kann man ein wenig die Philosophie wiedererkennen, die dem Begriff der Mikrowelt zugrunde liegt: "model of knowledge domain to be investigated with the software" (Noss & Hoyles 1996, S.65). Der Lernende (re-)konstruiert das Wissen, das in der Softwareumgebung materialisiert ist. Er kann sich mit dieser Umgebung frei auseinander setzen, offensichtlich ohne dass sein spontanes Lernen bestimmten Notwendigkeiten folgen muß (Noss& Hoyles 1996, ebenda). In dieser Interaktion kann der Lernende die von Noss&Hoyles so genannten "situierten Abstraktionen" ("situated abstractions") entwickeln, also Invarianten entdecken, die durch die besondere Situation bestimmt sind, in der sie konstruiert wurden, die aber gleichzeitig eine gewisse Allgemeinheit besitzen, welche die spezielle Situation überschreiten.

> *"Within a computational environment, some at least of these objects and relationships become real for the learner (we are using 'real' here to mean something other than simply ontologically existent - perhaps meaningful or broadly connected are better descriptions): learners web their own knowledge and understandings by action within the microworld, and simultaneously articulate fragments of that knowledge encapsulated in computational objects and relationships - abstracting within, not away from, the situation. In computational environments, there can be an explicit appreciation of the form of generalized relations within them (the relational invariants) while the functionality and semantics of these invariants - their meanings - is preserved and extended by the learner."*
> *(Noss&Hoyles 1996, S. 125)*

Auch das funktionale Verständnis des Begriffs der Parallelen kann mit Hilfe der Begrifflichkeit der situierten Abstraktion gedeutet werden. Während der Prozess der Interiorisation den Akzent auf die Invarianten legt, die der tatsächlichen Tätigkeit mit dem Werkzeug zugrunde liegen, und so die damit verbundenen materiellen Aspekte der Tätigkeit ausblenden, sucht die Deutung mit Begriffen der situierten Abstraktion diese Aspekte nicht zu verdecken. Diese Deutung geht davon aus, dass der Lernende ein mehr oder minder hierarchisiertes Geflecht konstruiert, welches von Noss&Hoyles absichtsvoll "Web" genannt wird. Es soll nämlich in Weite und Tiefe die Struktur eines Hypertextes haben, in dem die verschiedenen situierten Abstraktionen miteinander verbunden sind. Jones (1999) und Hölzl (1996, 2001) haben mit diesem theoretischen Ansatz gearbeitet und mehrfach empirische Studien über die Strategien der Lernenden bei Aufgaben unter Einsatz von Cabri-géomètre vorgelegt. Sie zeigen, wie diese Umgebung die Strategien strukturiert, und sie haben die von den Lernenden bei dieser Gelegenheit entwickelten situierten Abstraktionen rekonstruiert. Dabei hat Hölzl vor allem den Zugmodus detailliert untersucht.

4 Aufbereitung des "Milieus" und Wechsel der Register

Im Mathematikunterricht in Frankreich dient die Geometrie von der 6. Klasse an (Alter der Schüler: 11-12 Jahre) der punktuellen Einführung in das Beweisen, in der 8. Klasse (13-14 Jahre) wird dies systematisiert. Die Schwierigkeiten beim Erlernen von Beweisen, wie sie von Lehrern und der didaktischen Forschung immer wieder aufgewiesen wurden, haben zu einer vorsichtigen Einführung in die theoretische Seite der Geometrie geführt. Die Unterscheidung von Zeichnungen und theoretischen Objekten wie auch der kontrollierte Wechsel zwischen diesen beiden Bereichen erscheinen dabei als Hilfen beim Erlernen der Ausarbeitung von Beweisen. Die derzeit gültigen Mathematiklehrpläne für das französische "Collège" (eine gesamtschulartige Schulform von 4 Jahren Dauer für die 11-15 jährigen Schülerinnen und Schüler) haben diese Gesichtspunkte berücksichtigt und empfehlen unter anderem Aufgabenstellungen, die den Übergang zwischen Sprache und Zeichnung wie beispielsweise in Konstruktionsaufgaben erfordern. Auch der Einsatz von geometrischen Konstruktionsprogrammen wird empfohlen. Im Folgenden untersuchen wir, auf welche Weise man unter Einsatz von DGS a-didaktische "Milieus" so organisieren kann, dass der Wechsel zwischen den Registern "Sprache" und "Zeichnung" (vgl. Abschnitt 1) unvermeidlich ist. Tatsächlich sind vier Arten von Übergängen möglich, obwohl natürlich bei bestimmten Aufgaben Mischformen auftreten oder mehrere Wechsel von Registern erforderlich sind.

Ziel-Register / **Anfangs-Register**	**Zeichnung**	**Text**
Zeichnung	Reproduktion /Vervollständigung	Beschreibung von Figuren Konstruktionsprogramm
Text	Konstruktion	Beweis

Tabelle: Wechsel der geometrischen Register

Natürlich waren bestimmte Aufgabenstellungen aus der Tabelle schon vor dem Einsatz von DGS im Schulunterricht üblich, während die textlichen Beschreibungen von Figuren erst durch Brousseau in den französischen Unterricht eingeführt wurden (vgl. Brousseau 1997).

4.1 Vom Text zur Zeichnung

Hier geht es um Aufgabenstellungen, deren Sinn für Schüler vor allem am Anfang schwer zugänglich ist (vgl. Abschnitt 1). Auch die Möglichkeiten der Kontrolle der Richtigkeit von Lösungen in einer Papier&Bleistift-Umgebung ist für solche Schüler schwer einzuschätzen. DGS bieten nun ein "Milieu" an, in dem durch den Zugmodus robustere Kontrollmöglichkeiten geboten werden, die Schülern allerdings nicht problemlos einleuchten. Dabei ist einerseits die Schwierigkeit der Schüler zu nennen, sich auf den neuen didaktischen Vertrag einzulassen, dass Zeichnungen Zugmodusresistent sein müssen (Bellemain&Capponi 1992, Sträßer 1996). Andererseits gibt es weiterhin immer wieder Lösungsversuche, die teilweise auf Schätzstrategien bzw. Augenschein beruhen (vgl. die zahlreichen Belege etwa bei Hölzl 1996, Jones 1998, Noss 1994).

Mit Rabardels Ansatz zur Instrumentierung (vgl. Abschnitt 3.3.1) können diese Schwierigkeiten als Prozess des Ingang-Setzens von Gebrauchsschemata gedeutet werden (vgl. Rabardel 1995, S.

115). Allerdings sind die zunächst entwickelten Schemata nicht automatisch die effizientesten oder treffendsten. So ist etwa ein verbreitetes Schema zur Konstruktion von Seiten gleicher Länge - wie etwa bei der Aufgabe, ein Quadrat zu konstruieren (vgl. Laborde&Sträßer 1990), - die Anzeige der Länge einer gegebenen Strecke, um dann nach Augenmaß eine Strecke gleicher Länge zu konstruieren und einen Endpunkt so lange zu ziehen, bis die gemessene Länge übereinstimmt. Offensichtlich beruht dieses Schema auf mathematisch korrektem Wissen, aber insofern einem fehlerhaften Werkzeugeinsatz, als die Schüler dabei Cabri die Fähigkeit zuschreiben, zu verstehen dass die Strecke eine feste Länge hat, nämlich die, die angezeigt wurde. Vor allem Anfänger schreiben Artefakten oft Fähigkeiten zu, die eher dem Subjekt als dem Werkzeug zukommen (Rabardel 1995, S. 157). Außerdem wiederholen die Schüler dabei eine Verfahrensweise aus der Papier&Bleistift-Umgebung. Unter dem Blickwinkel des Lernens von Geometrie ist nun interessant, dass die korrekte und schnellste Werkzeug-gestützte Verfahrensweise für die Übertragung einer Streckenlänge in Cabri auf der Verwendung eines Kreises beruht. Setzen Schüler also dieses korrekte neue Schema ein, so nutzen sie gleichzeitig einen Kreis als Menge von gleich weit von einem Punkt entfernten Punkten, also strikt mathematisches Wissen.

Gomes (1999) hat bei Konstruktionsaufgaben die Instrumentierungsschemata und ihre Entwicklung bei Schülern des "Collège" genau studiert und konnte die von den Schülern eingesetzten Schemata mit Invarianten oder "Theorèmes en acte" im Sinne von Vergnaud in Verbindung bringen. Der Zugmodus unterstützt dabei oft die Entwicklung von Schülerlösungen. Außerdem scheinen die zunächst eingesetzten Handlungsschemata weniger inkorrekt in Bezug auf die zugrundeliegenden mathematischen Beziehungen als vielmehr durch ihren Einsatz des Augenscheins fehlerhaft zu sein. Dies wird oft aus Handlungsschemata der Papier&Bleistift-Umgebung übernommen (vgl. das oben genannte Beispiel). Die Entwicklung Werkzeug-gestützter Lösungen geht dabei oft auch mit einem zunehmenden Einsatz mathematischer Kenntnisse einher. So wird Rabardels These bestätigt, nach der der Prozess der Instrumentierung Quelle von entwickelteren Vorstellungen über die Wirklichkeit bzw. den beteiligten Wirklichkeitsausschnitt sein kann.

Tatsächlich erwähnen die Untersuchungen fast immer Fortschritte der Schüler bei diesen Aufgabenstellungen, die auf dem Zugmodus als Aufweis von Konstruktionen nach Augenschein beruhen. Widerstand, diesen neuen Vertrag (vgl. weiter oben) einzugehen, können also diese Entwicklung verlangsamen. Oftmals ziehen Anfänger beispielsweise nur in einem sehr begrenzten Teil des Bildschirmes (Bellemain&Capponi a.a.O., Rolet 1996). Die Grenzen eines DGS-gestützten "Milieu" bestehen also in der Einführung dieses Vertrages, der aufgrund der Interventionen des Lehrers ausgehandelt werden muss. Man findet also die Notwendigkeit der Präsenz eines Lehrers - allerdings in einer anderen Rolle als in der Papier&Bleistift-Umgebung - wieder. Der Lehrer bewertet nicht die Schülerlösung, sondern fordert den Einsatz des Zugmodus ein, d.h. er bringt den Schüler in eine Auseinandersetzung mit dem "Milieu". Die Situation hat so mehr a-didaktischen Charakter.

Allerdings muß hinzugefügt werden, dass der Zugmodus den Schülern nicht alle Fehler aufzeigt. So konstruierten beispielsweise Schüler (15-16 Jahre alt) das Bild eines Kreises um den Punkt O unter einer Scherung, indem sie einen Kreis um O', das Bild von O bei der Scherung, durch einen Punkt P' (das Bild eines Kreispunktes P des Kreises um O) konstruierten (vgl. Jahn 1998). Ziehen sie nun M oder O, so sehen sie, dass sich der Bildkreis bewegt und weiterhin durch P' geht. Sie sind also zufrieden, das falsche "Theorème en acte" ("Das Bild eines Kreises unter einer Scherung ist ein Kreis") wird nicht falsifiziert. Das Beispiel zeigt, wie nützlich Kenntnisse über die von den

Schülern erwarteten Lösungen sind, um Situationen zu konstruieren, in denen der Zugmodus ihre möglicherweise falschen Produktionen auch als solche entlarvt. Im vorliegenden Falle genügt es, die Schüler einen weiteren Punkt Q auf dem Kreis um O und sein Bild Q' konstruieren und dann den Punkt Q ziehen zu lassen.

Die Besonderheit von Cabri, die Menü-Leiste zu konfigurieren, wurde auch genutzt, um Schülern bestimmte Konstruktionsverfahren unmöglich zu machen, für Lösungen müssen dann andere geometrische Zusammenhänge eingesetzt werden. Die Konstruktion einer Parallelen ohne den Menüpunkt "Parallele" und "Mittelpunkt" erfordert dann den Einsatz geometrischer Abbildungen, die so zu Werkzeugen der Herstellung geometrischer Eigenschaften werden (vgl. Laborde&Capponi 1994). Wir vermuten, dass solcher handelnde Gebrauch die auch sprachliche, speziell beweisende Nutzung der Abbildungseigenschaften vorbereitet und so die Rolle einer semiotischen Mediation von Abbildungseigenschaften übernimmt. In gleicher Weise erlaubt der Menüpunkt "Spur", später der Menüpunkt "Ortskurve", das Bild eines Kreises unter der Scherung zu erhalten und dient der semiotischen Mediation des Satzes, nachdem die Bildfigur die Menge der Bildpunkte der Urbildfigur ist (vgl. Jahn a.a.O.).

4.2 Von der Zeichnung zum Text

Aufgabenstellungen zur Wiedergabe einer traditionellen Zeichnung (auf Papier) bringen zwei Partner A und B in eine asymmetrische Rollenverteilung: A hat eine Zeichnung, aber nicht die Mittel, um zu zeichnen, während B keine Zeichnung, aber die Zeichenwerkzeuge hat. Zur Lösung gibt A an B Informationen, die hoffentlich genau genug sind, damit B die Zeichnung erfolgreich reproduzieren kann. Dabei lernt A den Gebrauch einer korrekten, unzweideutigen mathematischen Sprache. Seit einigen Jahren finden sich solche Aufgabenstellungen in den französischen Schulbüchern der 6. und 7. Klassen (Alter: 11-13 Jahre). Margolinas (1993) hat die Grenzen dieses "Milieus" aufgezeigt: Wenn B die impliziten Annahmen des Schülers A teilt, kann er selbst die unvollständigen und mehrdeutigen Formulierungen von Schüler A verstehen, während er möglicherweise korrekte Formulierungen nicht versteht.

Die Übersetzung solcher Aufgabentypen in eine DGS-Umgebung bestünde darin, dass der Schüler A eine Papier-Zeichnung, der Schüler B eine DGS zur Verfügung hat. A sollte B die Informationen zukommen lassen, die es B ermöglichen, die Zeichnung zu reproduzieren. Allerdings taucht nun ein neues Problem auf: Die Papier-Zeichnung bestimmt nicht eindeutig die Cabri-Zeichnung, selbst wenn im Zugmodus eine Position genau der der originalen Papier-Zeichnung entspricht. Tatsächlich kann eine Zeichnung ein geometrisches Objekt ja gar nicht eindeutig bestimmen, das ist nur mit einem zusätzlichen Text möglich (vgl. Laborde&Capponi 1994).

Geht man beispielsweise bei nebenstehender Abbildung 3 davon aus, dass sich die Kreise in jedem Fall in zwei Punkten schneiden oder können sie in beliebiger Lage gedacht werden?

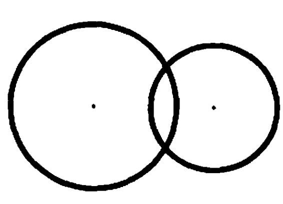


Abb. 3

Solche Situationen des Übergangs von der Zeichnung zu einem Text sind also bzgl. ihrer Zielrichtung für den Einsatz von DGS wie Cabri anzupassen. Schüler sollen sich der Komplexität der Beziehungen zwischen Zeichnung und Text bewußt werden, speziell in Bezug auf die Mehrdeutigkeit der Vorgaben nur durch eine Zeichnung (vgl. Bergue 1993). Die Vielfalt möglicher Zeichnungen zu einer geometrischen Beschreibung kann im Klassenverband unter Einsatz eines Overhead-Displays verdeutlicht werden. Rolet (1996) hat diesen Situationstyp (Reproduktion einer Papier-Zeichnung als Cabri-Zeichnung) mit künftigen Primarschullehrern genutzt, wobei ihre genauen Untersuchungen die beiden oben genannten Grenzen herausgestellt haben. Tatsächlich besteht also ein grundlegender Unterschied zwischen einer Papier-Zeichnung, einer zeichnerisch-graphischen Darstellung, und einer Cabri-Zeichnung, die das Resultat einer Beschreibung in geometrischen Begriffen ist und eine unendliche Vielfalt zeichnerisch-graphischer Darstellungen erlaubt. Genau dies war der Anlaß, den Gegensatz von "Zeichnung" und Figur" zu diskutieren. DGS haben hier zweifellos die Rolle eines Katalysators theoretischer Reflexion gespielt, indem sie ein "Fenster" auf diese Fragen geöffnet haben (vgl. diese Metapher bei Noss&Hoyles 1996).

4.3 "Boîtes noires" - schwarze Kästen

Die bekannten "schwarzen Kästen" ("boîtes noires"), bei denen eine vorgegebene Cabri-Zeichnung zu reproduzieren ist, stellen einen weiteren Aufgabentyp zum Übergang von einer Zeichnung zu einem "Text" bzw. einer Zeichnung dar. Dabei geht es darum, eine vorgegebene Cabri-Zeichnung in Cabri derart zu reproduzieren, dass das Verhalten der zweiten Zeichnung auch im Zugmodus mit der Vorlage übereinstimmt. Dabei sind zwei Aufgaben zu lösen:

- Man muss die Objekte und die geometrischen Relationen zwischen ihnen bestimmen, die der Cabri-Vorlage zugrunde liegen.
- Man muss eine Konstruktionsvorschrift für Cabri finden, die diese Objekte und die Relationen zwischen ihnen erzeugt, also eine Konstruktionsaufgabe.

Je nach der Problemstellung können diese beiden Aufgaben, auch wenn sie voneinander abhängen, durchaus unterschiedlich schwer oder leicht sein. Sowohl das zeichnerisch-graphische Aussehen wie auch das Verhalten beim Zugmodus mögen leicht oder schwer deutbar sein, gleiches gilt von der Wahl der Cabri-Werkzeuge und der Reihenfolge ihres Einsatzes für die Konstruktionsaufgabe. So ist beispielsweise die Drehung eines gleichseitigen Dreiecks fester Seitenlänge um den Drehpunkt leicht zu erkennen, aber durchaus schwerer zu reproduzieren. Ein einzelner Punkt, dessen Lage von einem Dreieck abhängt (etwa der Höhenschnittpunkt des Dreiecks) mag schwer erkennbar sein, aber sehr leicht zu rekonstruieren (vgl. Abbildung 4).

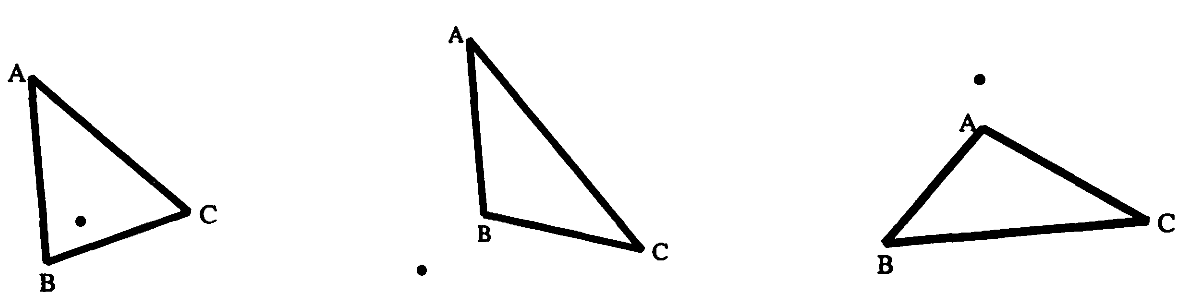


Abb. 4

Diese Aufgabentyp "schwarzer Kasten" ist insofern bemerkenswert, als er nur in der DGS- Umgebung möglich ist. Besonders in der Phase der Deutung der gegebenen Zeichnung und des Verhaltens beim Zugmodus erzeugen solche Aufgaben einen Zusammenhang zwischen der zeichnerisch-graphischen Darstellung und der geometrischen Theorie. Für die Lösung müssen nämlich die geometrischen Objekte und ihre gegenseitigen Beziehungen in der Vorlage erkannt werden. Auf diese Weise wird die Lösung solcher Problemstellungen vorbereitet, in denen geometrische Objekte und ihre Relationen zu charakterisieren sind. Gerade in der ersten Phase der Aufgaben von Typ "schwarzer Kasten" müssen also geometrische Kenntnisse mobilisiert werden.

Folgendes Experiment mit 15 bis 16 Jahre alten Schülern (vgl. Clarou 2001) kann diese Verflechtung von zeichnerisch-graphischen Aspekten und geometrischer Theorie belegen: Gegeben sind ein Punkt P und sein Bild P' unter einer unbekannten Abbildung. Aufgabe der Schüler ist es, P' in Abhängigkeit des Punktes P zu (re-)konstruieren, wobei zu beachten ist, dass bei beliebigem Ziehen von P auch P' sich bewegt, allerdings in nicht-deutbarer Weise. Nutzt man aber die Idee, Fixpunkte dieser Abbildung zu finden, so bemerkt man schnell, dass es eine Region gibt, in der P und P' kaum voneinander verschieden sind, man kann sogar P' auf P wandern lassen. Kontrolliert man also das Ziehen mit Hilfe geometrischer Vorstellungen, so wird man leichter die zeichnerischen Zusammenhänge erfassen.

Einige Schüler haben P und P' durch eine Gerade verbunden, allerdings beim Ziehen von P dann keine Besonderheiten gefunden. Andere haben die visuellen Phänomene dadurch verstärkt, dass sie die "Spur" der Geraden haben zeichnen lassen (vgl. Abbildung 5).

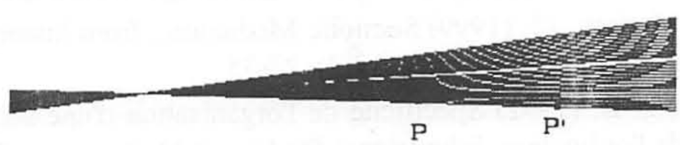


Abb. 5

Auf diese Weise wird offensichtlich, dass die Gerade durch P und P' einen Fixpunkt hat, ein Handlungsschema, welches die "Spur" mit dem Zugmodus zusammenbringt, hat eine Schlüsselrolle beim Aufspüren einer geometrischen Relation gespielt. Allerdings muss gesagt werden, dass diese Schüler unter Hinweis des Lehrers bereits früher Fixpunkte mit Hilfe des Menüpunktes "Spur" aufgespürt hatten. Man sieht ein weiteres Mal, wie die Handlungsschemata mit den geometrischen Eigenschaften verknüpft sind. Man könnte auch sagen, die Schüler haben die situierte Abstraktion des Fixpunktes einer beweglichen Geraden aufgrund des Menüpunktes entwickelt - ähnlich wie Cleo und Musha in Noss&Hoyles 1996 (S. 116) eine Spiegelungsgerade in Cabri folgendermaßen kennzeichnen: "The mirror line is what you see on the screen if you drag points and their reflections together."

5 Schlußbemerkung

Unsere Ausgangshypothese war, dass für das Lernen von Geometrie die Beziehungen zwischen zeichnerisch-graphischen Darstellungen und theoretischer Geometrie zwar subtil, aber wichtig sind. Dann haben wir gezeigt, dass DGS genutzt werden können, um a-didaktische Situationen zu schaffen, die Erkenntnisse über diese Beziehungen auf Seiten der Schüler befördern. In zahlreichen Beobachtungen solcher Situationen wird ein dialektisches Zusammenspiel von geometrischen Kenntnissen, Geometrie und zeichnerischen Darstellungen und dem Gebrauch von Cabri sichtbar. Wenn diese Zusammenhänge auch von verschiedenen Forschern in unterschiedlichen theoretischen Rahmungen formuliert werden, so werden sie doch von allen diesen Forschern erkannt. Diese Feststellung kann man mit Gewinn auf den Einsatz von DGS beziehen und in diesem Fakt für Schüler die Chance eines erweiterten Zugangs zur Geometrie sehen. Allerdings müssen solche Situationen sehr genau ausgearbeitet werden. Lehrende spielen weiterhin in solchen Situationen eine wesentliche Rolle und werden keineswegs überflüssig durch den Einsatz Dynamischer Geometrie Software wie Cabri-géomètre.

Die Autorin ist Rudolf Sträßer sehr dankbar, nicht nur für die Übersetzung ihres französischen Textes in kurzer Zeit, sondern auch für die aktive Unterstützung während der Ausarbeitung des Textes.

Literatur

Argaud, H.-C. (1998) Problèmes et milieux adidactiques pour un processus d'apprentissage en géométrie plane à l'école élémentaire dans les environnements papier crayon et Cabri-géomètre. Thèse de doctorat de l'université Joseph Fourier, Grenoble

Arsac, G. (1998) Les limites d'un enseignement déductif de la géométrie. Petit x, 47, 5-31

Bartolini-Bussi, M. & Mariotti, M. (1999) Semiotic Mediation : from history to mathematics classement. For the Learning of Mathematics, 19(2), 27-35

Bellemain, F. & Capponi, B. (1992) Spécificité de l'organisation d'une séquence d'enseignement lors de l'utilisation de l'ordinateur. Educational Studies in Mathematics 23 (1). 59-97

Bergue, D. (1993) Débat de classe. In: Université d'été Apprentissage et enseignement de la géométrie avec ordinateur : Utilisation du logiciel Cabri-géomètre en classe. Grenoble: IUFM, IREM et LSD2 (IMAG)

Brousseau, G. (1997) Theory of Didactical Situations in Mathematics. Dordrecht: Kluwer Academic Publisher

Capponi, B. & Laborde, C. (1995) Modélisation à double sens. Actes de la VIIIème école d'été de Didactique des Mathématiques, Noirfalise, R. & Perrin, M.J. (Hrsg.), (265-278) IREM de Clermont Ferrand

Clarou, P., Laborde, C. & Capponi, B. (2001) Géométrie avec Cabri. Scénarios pour le lycée Grenoble : Editions CRDP

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In: Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century, C. Mammana and V. Villani (Hrsg.) (37-52), Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Fishbein, E. (1993) The theory of figural concepts. Educational Studies in Mathematics 24 (2), 139-162

Gomes, A. S., (1999) - Développement conceptuel consécutif à l'activité instrumentée : l'utilisation d'un système informatique de géométrie dynamique au collège. Thèse en Sciences de l'Éducation, Université Paris V.

Grenier, D. (1988) Construction et étude du fonctionnement d'un processus d'enseignement sur la symétrie orthogonale. Thèse de l'université Grenoble 1

Hölzl, R. (1996) How does 'Dragging' affect the Learning of Geometry. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 1(2) 169-187.

Hölzl, R. (2001) Using Dynamic Geometry Software to Add Constrast to Geometric Situations-A case study. International Journal of Computers for Mathematical Learning. 6(1) 63-86.

Jahn, A.P (1998). Des transformations de figure aux transformations ponctuelles : étude d'une séquence d'enseignement avec Cabri-géomètre. Thèse de l'Université Joseph Fourier, Grenoble

Jones, K. (1998) Deductive and intuitive approaches to solving geometrical problems. In: Perspectives on the Teaching of Geometry for the 21st century. Mammana C. & Villani V. (Hrsg.) (78-83) Dordrecht: Kluwer Academic Publisher

Jones, K. (1999) Students interpretations of a dynamic geometry environment. In: European Research in Mathematics Education, I. Schwank (Hrsg.), 249-262, Osnabrück : Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik.

Laborde, C. (1999) Probleme und Potentiale dynamischer Computer-Darstellungen beim Lehren und Lernen von Geometrie. In : Mathematische Bildung und neue Technologien, Kadunz, G. u. a. (Hrsg.) (199-217), Stuttgart-Leipzig : B.G. Teubner

Laborde J.-M. (1985) Projet de cahier de brouillon informatique pour la géométrie. Grenoble: Archives LSD2-IMAG

Laborde, C. & Capponi, B. (1994) Cabri-géomètre constituant d'un milieu pour l'apprentissage de la notion de figure géométrique. Recherches en Didactique des Mathématiques. 14 (1) 165-210

Laborde, J.M. & Sträßer, R. (1990) Cabri-Géomètre, a microworld of geometry for guided discovery learning. Zentralbalt für Didactik der Mathematik. 22 (5), 171-90.

Léontiev, A., (1984) - Activité, conscience et personnalité. Éditions du Progrès, Moscou.

Lister, T. (1998) Hyperbolic Geometry using Cabri. http://mcs.open.ac.uk/tcl2/nonE/nonE.html

Margolinas, C. (1993) De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques. La Pensée Sauvage éditions.

Noss R., Hoyles C., Healy L., Hölzl R. (1994) Constructing meanings for constructing : an exploratory study with Cabri-Géomètre. Proceedings of PME XVIII, (vol. 3, 3-360 - 3-367) University of Lisboa

Noss R., & Hoyles C. (1996) Windows on mathematical meanings Dordrecht: Kluwer

Rabardel, P. (1995) Les hommes et les technologies, une approche cognitive des instruments contemporains. Paris : Armand Colin

Rabardel, P. (1999) Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques. Actes de la Xème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, M. Bailleul (Hrsg.)(203-213) Caen: Académie de Caen Rectorat

Rolet, C. (1996) Dessin et figure en géométrie: analyse des conceptions de futurs enseignants dans le contexte Cabri-géomètre. Thèse de l'Université Claude Bernard Lyon 1

Salin, M.-H. & Berthelot, R. (1994) Phénomènes liés à l'insertion de situations adidactiques dans l'enseignement élémentaire de la géométrie. Vingt ans de didactique des mathématiques en France, Artigue et al. (Hrsg.), (275-282) Grenoble: La Pensée Sauvage Edition

Sträßer, R. (1990). Euklidische Geometrie versus deskriptive Geometrie. In Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.), Die Zukunft des Mathematikunterrichts (73-76). Soest: Soester Verlagskontor.

Sträßer, R. (1996). Students' Constructions and Proofs in a Computer Environment - Problems and Potentials of a Modelling Experience. In J.-M. Laborde (Hrsg.), Intelligent Learning Environments - The Case of Geometry (203 - 217). Berlin: Springer.

Vérillon, P. & Rabardel, P. (1995) Cognition and Artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. European Journal of Psychology in Education, 9(3): 77-101

Vygotsky, L.S. (1930) La méthode instrumentale en psychologie. in: Vygotsky aujourd'hui, B.Schneuwly & J.P. Bronckart (Hrsg.), Delachaux et Niestlé.

Zur Begründung der dynamischen Geometrie

Jean-Marie Laborde, Grenoble

After some remarks on geometry in general, a definition and "principles" of Dynamic Geometry are put forward. Using special examples, the implementation of the principles is then analysed in three pieces of Dynamical Geometry Software (DGS).

Normalerweise führt man die Geometrie als Wissenschaft von der Landvermessung auf die Messkundigen des alten Ägypten zurück, die nach jedem Hochwasser des Nils die vom Wasser zerstörten Grenzen der einzelnen Parzellen wiederherstellen mussten. Weiterhin geht man davon aus, dass diese Wissenschaft sich mit Euklid und seinen berühmten Büchern derart weiter entwickelt hat, dass sie für Jahrhunderte der Prototyp mathematischen Wissens war.

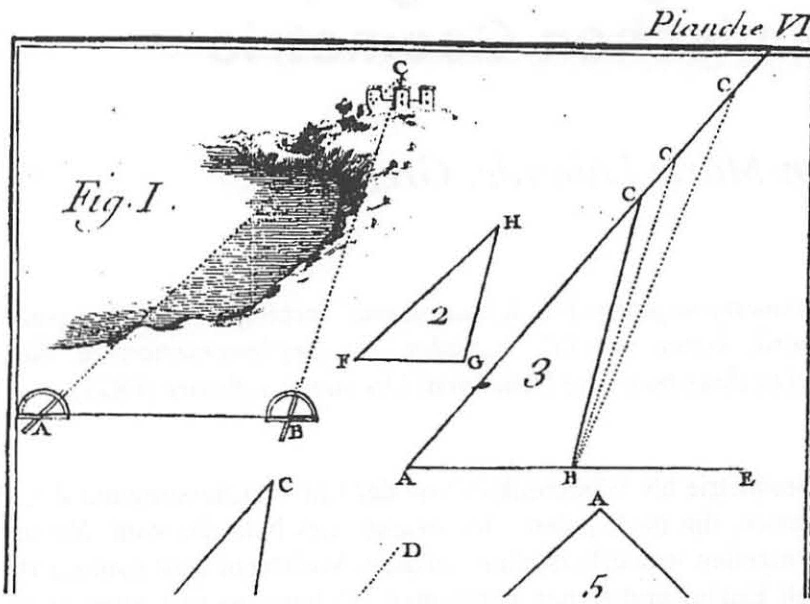
Die Geometrie nach Art von Euklid stellt allerdings eine äußerst statische Sichtweise der geometrischen Figuren bzw. Zeichnungen dar. Man zeichnet die Figur und dann gibt es diese Zeichnung unabhängig von der Person des Zeichners. Dieser kann nicht (mehr) wirklich an ihr und mit ihr arbeiten. Möglicherweise liegt hier auch ein Grund für die hermetisch abgeschlossene abstrakte Bedeutung, die man den Theoremen der Geometrie des Euklid zuschreibt. In jedem Dreieck - was tatsächlich heißt: in dem speziellen Dreieck der Zeichnung - schneiden sich die drei Mittelsenkrechten in einem Punkt. Eine solche Wahrnehmung ist sicherlich verschieden - mindestens was die mentale Repräsentation angeht - von einer Wahrnehmung eines kontinuierlich veränderbaren Dreiecks, bei dem man die kontinuierliche Ortsänderung seines Umkreismittelpunktes verfolgen kann. Dynamische Geometrie beruht auf Begriffen höchst unterschiedlicher Herkunft: Sie ruht auf Begriffen der statischen Geometrie des Euklid, auf solchen der Geometrie der Bewegung wie auf Begriffen der stetigen Veränderung von Formen, welche eine gewisse Menge von Eigenschaften nicht verändern, invariant lassen.

1 Bewegung in der Geschichte der Geometrie von Euklid bis heute

War die griechische Geometrie vielleicht ein wenig verschieden von der Art und Weise, wie Euklid sie uns darstellt? Kannten die griechischen Geometer wirklich keine Bewegung als Teil ihrer Wissenschaft? Um diese Vermutungen ein wenig zu stützen, sei auf Plato verwiesen, der die Begriffe der elementaren Geometrie in einer nicht nur statischen Perspektive entwickelt.

In der Folge hat die euklidische Tradition zwar in besonders nachhaltiger Weise die Entwicklung der Geometrie wie auch den Geometrie-Unterricht beeinflusst. Dennoch haben einige Autoren die Notwendigkeit verspürt, ihre Beweise auf Schlussweisen zu stützen, die die Bewegung - und implizit gewisse Formen der Stetigkeit - nutzen, damit die Geometrie und ihre Theoreme überzeugender werden.

Clairaut etwa kommentiert die folgende Abbildung 1 wie folgt:



"... Gehen wir beispielsweise davon aus, dass die Strecke *BC* sich um *B* dreht und von der Strecke *AB* entfernt, um sich einer Strecke *BE* anzunähern, so wird sich offensichtlich der Winkel bei *B* kontinuierlich vergrößern, während demgegenüber der Winkel bei *C* zunehmend kleiner wird ..." (Clairaut 1741; *Übersetzung R. Sträßer*).

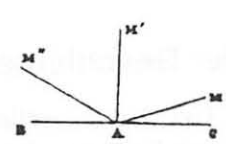
Abb. 1

Im Zusammenhang mit der Eindeutigkeit einer Senkrechten zu einer gegebenen Geraden durch zwei Punkte *B* und *C* im Punkt *A* der Geraden (vgl. die nebenstehende Abbildung 2) argumentiert Legendre wie folgt: "... Nehmen wir etwa an, dass sich eine Gerade *AM*, die zunächst mit der Geraden durch *A* und *C* identisch ist, um den Punkt *A* dreht, so bildet sie zwei gegenseitig anliegende Winkel *MAC*, *MAB*, von denen der eine, nämlich *MAC*, zunächst sehr klein ist, aber immer weiter wächst, während der andere Winkel *MAB*, zunächst größer als *MAC*, immer kleiner und dann Null wird. Der Winkel *MAC*, zunächst kleiner als *MAB* wird als größer als dieser; folglich muss es eine Position *AM'* der beweglichen Geraden geben, in der die beiden Winkel gleich sind, und es ist offensichtlich, dass es nur eine solche Position gibt." ([Legendre 1848]; *Übersetzung R. Sträßer*).

THÉORÈME.

Par un point pris sur une droite on peut élever une perpendiculaire sur cette droite, et on n'en peut élever qu'une.

En effet, supposons qu'une droite AM d'abord couchée sur AC, tourne autour du point A, elle formera deux angles adjacents MAC, MAB, dont l'un MAC, d'abord très-petit, ira toujours en croissant, et dont l'autre MAB, d'abord plus grand que MAC, ira constamment en décroissant jusqu'à zéro.



L'angle MAC, d'abord plus petit que MAB, deviendra donc plus grand que cet angle; par conséquent il y aura une position AM' de la droite mobile où ces deux angles seront égaux, et il est évident qu'il n'y en aura qu'une seule.

Corollaire. Tous les angles droits sont égaux.

Abb. 2

Treutlein stellte 1911 zum "geometrischen Anfangsunterricht" fest:

"... Als einer der Hauptunterschiede altgriechischer und neuzeitlicher Geometrie gilt das, daß in jener die Figuren sämtlich als starr und fest gegeben angenommen werden, in dieser als beweglich und gewissermaßen fließend, **in stetem Übergang von einer Gestaltung zu anderen** begriffen. Sollen unsere Schüler in die heutige Form der Wissenschaft und gar gelegentlich in deren Anwendung eingeführt werden, so müssen sie beizeiten daran gewöhnt werden, die Figuren als jeden Augenblick veränderlich zu denken und dabei auf die gegenseitige Abhängigkeit ihrer Stücke zu achten, diese zu erfassen und beweisen zu können.

Der Auffassung der Figuren als starrer Gebilde kann und muß in verschiedener Weise entgegen gearbeitet werden. Das eine hierzu Erforderliche ist das Beweglichmachen der Teile einer Figur...

Hierbei kann wohl auch ein zweites miterledigt werden: die Erzeugung der Grenzfälle ...

Als drittes soll hier erwähnt werden das Bewegen nicht bloß der Figurenteile gegeneinander, sondern das Bewegen der ganzen Figur, sei's in der Ebene, sei's im Raum ..." (Treutlein 1911, S. 202f; Fettdruck i.O.).

Auch die Hilbertsche Axiomatik hatte - in der Folge Euklids - eher statische Züge, während Axiomatisierungen wie die von Bachmann zeigten, dass Bewegungsbegriffe ebenso geeignet sind, Geometrie axiomatisch zu fundieren.

2 "Deklarative" versus "konstruktive" Geometrie

Man kann sich eine geometrische Zeichnung als eine Realisierung einer gewissen Menge von Anforderungen (in der Regel sind das Spezifikationen von Eigenschaften) vorstellen, die sich auf gewisse Objekte wie Punkte, Geraden, Kreise und dergleichen beziehen. Dazu muss diese Realisierung nicht notwendig unveränderbar sein, sondern kann durchaus als kontinuierlich veränderlich gedacht werden. Prinzipien, die geeignet sind, solche Veränderungen zu steuern, sind Teil einer formellen oder abstrakten Definition der dynamischen Geometrie (vgl. Abschnitt 3).

Demgegenüber geht der Mikrowelt-Ansatz eher von einer leeren Zeichnung aus - also nicht von einer Zeichnung im Sinne der Geometrie des Euklid, wo "Zeichnung" an die Vorstellung einer geschlossenen Ansammlung von Linien gebunden ist. In einem solchen Ansatz sind Objekte der Geometrie all die Objekte, die als Kombination von gegebenen Basis-Objekten konstruierbar sind (z.B. Punkte, Geraden, Kreise). Man hat es bei einer Mikrowelt mit einem strikt konstruktiv-prozeduralen Ansatz zu tun.

Betrachten wir etwa die Zeichnung eines Dreiecks mit seinen drei Höhen sowie dem Höhenschnittpunkt. Bei den meisten DGS kann man diese Zeichnung "animieren", indem man einen der drei Eckpunkte zieht, weil diese die "Blätter" des Konstruktionsbaumes der Zeichnung sind, die man in der Regel ausgehend von drei Punkten über das Dreieck zu den drei Höhen gewonnen hat. Eine Konstruktion des Dreiecks ausgehend von drei sich schneidenden Geraden wäre eher überraschend (vgl. [Allen & Trilling]). Bis zu einem gewissen Grade zeigen Cabri-géomètre und Geometer's Sketchpad ein deklaratives Verhalten. Wenn man zum Beispiel in der Macintosh-Version von Cabri II den Mittelpunkt M zweier Punkte A und B konstruiert, kann man diese Strecke auch an ihrem Mittelpunkt ziehen, was im Beispiel eine Verschiebung der Strecke AB anhand ihres Mittelpunktes M ist. In derselben (Macintosh-)Version kann man mit Hilfe einer Mittelsenkrechten zwei diese Mittelsenkrechte definierende Punkte ziehen. Diese Funktionalität ist im Übrigen von vielen Nutzern übersehen worden, während Lehrer (wie Entwickler vergleichbarer Software) nach Hinweis auf diese Eigenschaft in der Mehrzahl eher schockiert reagieren und diese ablehnen. Dennoch kann man dieses Verhalten als vollkommen natürlich und konsistent mit dem Ziehen an den Endpunkten einer Strecke ansehen. Es bedarf keiner besonderen kognitiven Anstrengung um einzusehen, dass man an irgendeinem oder gerade am Mittelpunkt einer Strecke ziehen kann, um das gleiche Ergebnis zu erzielen.

Geometer's Sketchpad geht in dieser Hinsicht noch weiter. Konstruiert man beispielsweise einen Punkt *P'* als Bild eines Punktes *P* bei einer Spiegelung an einer Geraden *g*, so kann man sowohl an *P* wie an *P'* ziehen, die beiden Punkte werden bezüglich ihres geometrischen Verhalten ununterscheidbar. Wir haben es mit einem Verhalten der Software zu tun, die der von Cabri II vollkommen vergleichbar ist, wo man nach Konstruktion eines regelmäßigen n-Ecks an jedem beliebigen Eckpunkt ziehen kann, ohne zu beachten, mit Hilfe welches Eckpunktes das n-Eck konstruiert wurde.

Eine "interessantere" Situation ist das obige Beispiel des Höhenschnittpunktes eines Dreiecks. Betrachtet man ein Dreieck *ABC* (in Geometer's Sketchpad also die Strecken *AB*, *BC* und *CA*) und den zugehörigen Höhenschnittpunkt *H*, so führt bei Geometer's Sketchpad das Ziehen an *H* zu einer Verschiebung der gesamten Zeichnung. Ist nun einer der Eckpunkte zum Beispiel als Punkt auf einer weiteren Strecke gebunden, so verhält sich die Zeichnung im Zugmodus völlig anders. Das Dreieck ändert seine Form, während *H* Höhenschnittpunkt des Dreiecks bleibt. In diesem Fall ist die Formänderung des Dreiecks noch relativ einfach zu analysieren. Aus der Sicht des Benutzers (und des Prinzips der direkten Manipulation) ist allerdings zu beachten, dass der Höhenschnittpunkt nicht direkt durch den Mauszeiger bewegt wird. Im Beispiel wird das Dreieck *ABC* dann nämlich auf eine Art und Weise neu berechnet, die den Höhenschnittpunkt *H* nicht dem Mauszeiger folgen lässt. Tatsächlich "überholt" er den Mauszeiger dann, wenn man das Dreieck stumpfwinklig macht und den Höhenschnittpunkt außerhalb des Dreiecks positioniert.

Selbst wenn man dieses Verhalten für fragwürdig hält, so weist es doch in die Richtung der u.a. in der Software GéoSpécif angestellten Überlegung der Rekonstruktion einer Zeichnung aufgrund der deklarativen - und weniger der prozeduralen! – Anforderungen [Allen & Trilling]. Hätte man beispielsweise die drei Eckpunkte *A*, *B* und *C* auf einen Kreis gelegt, so kann man mit Geometer's Sketchpad das Dreieck derart kontinuierlich verändern, dass der Höhenschnittpunkt *H* mit dem Kreismittelpunkt zusammenfällt. Auf diese Weise könnte man die Dreiecke studieren, deren Höhenschnittpunkte mit dem Umkreismittelpunkt zusammenfallen. Dennoch bleibt als ungelöstes Problem die mathematische Frage nach der Uneindeutigkeit des Dreiecks bei Manipulation seines Höhenschnittpunktes. Eventuell auf heuristischer Basis getroffene und notwendige Wahlen im Zuge der Implementation eines DGS sind möglicherweise weit weniger intuitiv – wie beispielsweise die Entscheidung, dass beim Zugmodus ein Punkt auf einer Strecke seine relative Position auf dieser Strecke beibehält.

3 Eine Definition der Dynamischen Geometrie

Im Lichte der bisher angestellten Überlegungen schlage ich vor, Dynamische Geometrie wie folgt zu definieren:

> Dynamische Geometrie ist die Analyse des "kontinuierlichen" Überganges von einer graphischen Darstellung einer Menge von Anforderungen, welche eine Figur festlegen, zu einer anderen graphischen Darstellung, die denselben Anforderungen genügt. Der Übergang von einer Darstellung zur anderen muss dabei gewisse Nebenbedingungen erfüllen und gewissen Prinzipien folgen.

In diesem Rahmen ist die Geometrie nach Art des Euklid, welche die Eigenschaften der Zeichnung als Realisation von Anforderungen untersucht, durchaus als Teil der Dynamischen Geometrie anzusehen. Man erweitert die Fragestellungen der Geometrie nach Art des Euklid "nur" um die Frage des dynamischen Übergangs von einer Zeichnung zu einer anderen. Ich kann also keinen Grund dafür sehen, irgendwelche Teile oder Aspekte der Geometrie nach Art des Euklid nicht auch der Dynamischen Geometrie zuzurechnen. Geometrie nach Art des Euklid ist schlicht die Einschränkung der Dynamischen Geometrie auf den Spezialfall, wo keine graphischen Nebenbedingungen zu respektieren sind. Die Menge der Nebenbedingungen ist leer.

Andererseits gibt es gewiss eine große Zahl verschiedener Nebenbedingungen, die man bzgl. graphischer Darstellungen fordern kann. Einer speziellen Auswahl solcher Nebenbedingungen entspricht dann jeweils eine besondere Dynamische Geometrie, die sich bei Implementation für eine Darstellung durch Computer wiederum weiter unterscheiden können. Folglich schlage ich folgendes Venn-Diagramm zur Dynamischen Geometrie vor:

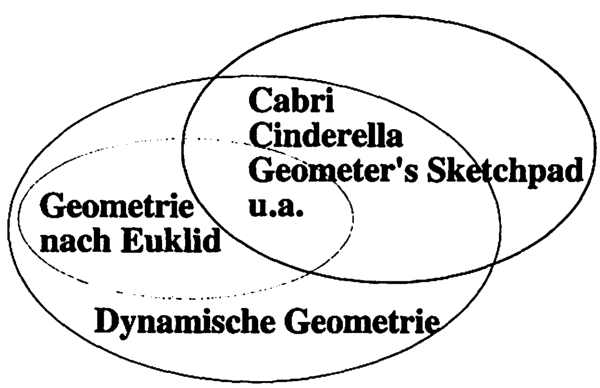


Abb. 3

Die Dynamische Geometrie wird dabei durch eine "Kartoffel" (im Französischen: "patatoïde") dargestellt, eine darin liegende kleinere "Kartoffel" stellt dabei die Geometrie nach Art des Euklid dar. Verschiedene Prinzipien definieren verschiedene Arten Dynamischer Geometrie - ein wenig in der Art, wie verschiedenen Axiome innerhalb der Geometrie verschiedene Geometrien wie endliche Geometrie, hyperbolische Geometrie, neutrale Geometrie, euklidische Geometrie gegeneinander abgrenzen [Laborde 1997] u. [Laborde 1999].

Als Modelle solcher durchaus unterschiedlichen Dynamischen Geometrien sind dann rechnergestützte Implementationen denkbar, die Annäherungen an solche Dynamische Geometrien anbieten.

Hierzu ist noch anzumerken, dass kaum eine nur wenig komplexe rechnergestützte Umgebung vorstellbar ist, die nicht eine gewisse Anzahl von Abweichungen vom theoretischen Objekt aufweist, welches sie darstellt. Hier ist nicht von vorneherein von "Bugs" oder Programmierfehlern zu reden, sondern zuallererst von Design-Entscheidungen, die notwendig mit jeder Implementation auf einem Rechner (oder gar in einem anderen Darstellungssystem) verbunden sind. Außerdem kann es (nach Aussage der Mathematischen Logik) keinen Beweis für die Korrektheit eines Programmes geben, wenn dieses Programm eine gewisse Komplexität aufweist. Allein diese Tatsache impliziert, dass jede komplexere Rechner-Implementation nur eine Approximation der abstrakten Objekte darstellen kann.

4 Prinzipien der Dynamischen Geometrie

Den nachfolgenden Überlegungen liegt die Idee zugrunde, dass ein Grund, wenn schon nicht der Hauptgrund für das Studium der Dynamischen Geometrie darin besteht, dass in Hinsicht auf die Exploration der Geometrie selbst der (Be-)Nutzer die Veränderungen einer Zeichnung nach Art der direkten Manipulation kontrollieren kann. Folglich wird Dynamische Geometrie erst dann wirklich interessant, wenn sie systematisch implementiert ist. Rechnergestützte Implementationen werden in der Folge "Dynamische Geometrie Systeme" (kurz: DGS) genannt.

Prinzip 0: ***Mathematische Konsistenz***

Wenn Z_1 die Darstellung einer Menge von Anforderungen ist und Z_2 aus Z_1 als stetige Verformung aus Z_1 entsteht, so muss auch Z_2 die Anforderungen an Z_1 erfüllen.

Prinzip 1: ***Direkte Manipulation***

Die Interaktionen zwischen Nutzer und System laufen ohne Verzögerung "in real time" ab - entsprechend dem Prinzip der Direkten Manipulation. Genauer: Wenn ein Punkt P "theoretisch" von einem Punkt P_1 nach P_2 bewegt werden kann, so kann der Benutzer tatsächlich P von P_1 nach P_2 mit Hilfe eines Zeige-Instrumentes (in der Regel der Maus, aber auch mit dem Zeigefinger bei einem "touch-screen" oder einem Zeichenstift auf einem Tablett) bewegen. Wenn ein Objekt O von anderen Objekten (etwa A, B und C) abhängt, so soll dieses Objekt "en bloc" veränderlich sein, dass heißt Bewegungen von O implizieren entsprechende Bewegungen von A, B und C.

Prinzip 2: ***Ergonomisches Verhalten***

Bei der Veränderung eines Teiles einer Zeichnung T_1 zu T_2 soll die gesamte Zeichnung sich entsprechend den Erwartungen des Benutzers verhalten. Sind hier mehrere verschiedene Implementationen möglich, so wähle man diejenige, die dem Prinzip der kontinuierlichen Veränderung (vgl. Prinzip 3) am besten entspricht. Dieses Prinzip kann man als eine Erweiterung des wohlbekanntes WYSIWIG Prinzip betrachten. Ich möchte das *What You See Is What You Get*-Prinzip zu einem *What You See Is What You Expect*-Prinzip erweitern, wie ich schon auf der IFIP-Konferenz 1990 in Reykjavik vorgeschlagen habe. Mit anderen Worten: auf eine Aktion mit einer gewisser Absicht des Benutzers (sei er ein Schüler, ein Lehrer, ein Mathematiker, ein Wissenschafter oder ein Fachmann) soll die Software auf solcher Weise reagieren, dass das Verständnis des Benutzers möglichst nicht erschüttert wird.

Prinzip 3: ***Kontinuierliche Veränderung***

Dieses Prinzip gehört wesentlich zur Dynamischen Geometrie, weil Dynamische Geometrie definitionsgemäß das Studium eben der kontinuierlichen Veränderungen einer Zeichnung ist, für die man gewisse graphische Forderungen verändert wie beispielsweise die Position einzelner Punkte.

Wie schon erwähnt: dieses Prinzip der kontinuierlichen Veränderung kann man als eine Folgerung aus dem WYSIWYE-Prinzip (siehe oben) betrachten. Für die Idee der stetigen Verformung lasse ich eine heutige Definition beiseite und gehe einfach zum Originaltext von Poncelet über.
Abbildung 4 auf der nächsten Seite zeigt, wie sich Poncelet in der Einleitung zu seinem „Traité des propriétés projectives de figures“ ausdrückt[1].

[1] Weiter liest man in der Einleitung: „L'admission ouverte de la loi de continuité, dans les recherches géométriques conduira nécessairement à des notions singulières, à de véritables paradoxes“. („Die offene Akzeptanz dieses Gesetzes der Kontinuität im Bereich der geometrischen Forschung wird unbedingt zu singulären Vorstellungen, zu echten Paradoxien führen.“)

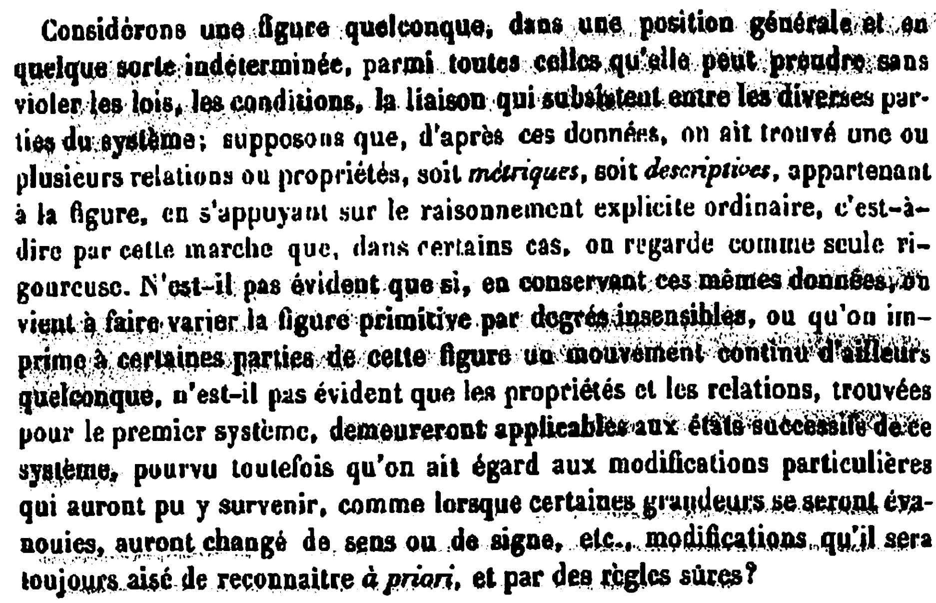

Considérons une figure quelconque, dans une position générale et en quelque sorte indéterminée, parmi toutes celles qu'elle peut prendre sans violer les lois, les conditions, la liaison qui subsistent entre les diverses parties du système; supposons que, d'après ces données, on ait trouvé une ou plusieurs relations ou propriétés, soit *métriques*, soit *descriptives*, appartenant à la figure, en s'appuyant sur le raisonnement explicite ordinaire, c'est-à-dire par cette marche que, dans certains cas, on regarde comme seule rigoureuse. N'est-il pas évident que si, en conservant ces mêmes données, on vient à faire varier la figure primitive par degrés insensibles, ou qu'on imprime à certaines parties de cette figure un mouvement continu d'ailleurs quelconque, n'est-il pas évident que les propriétés et les relations, trouvées pour le premier système, demeureront applicables aux états successifs de ce système, pourvu toutefois qu'on ait égard aux modifications particulières qui auront pu y survenir, comme lorsque certaines grandeurs se seront évanouies, auront changé de sens ou de signe, etc., modifications qu'il sera toujours aisé de reconnaître *à priori*, et par des règles sûres?

Abb.4 : Aus dem „Traité des propriétés projectives de figures" von Poncelet

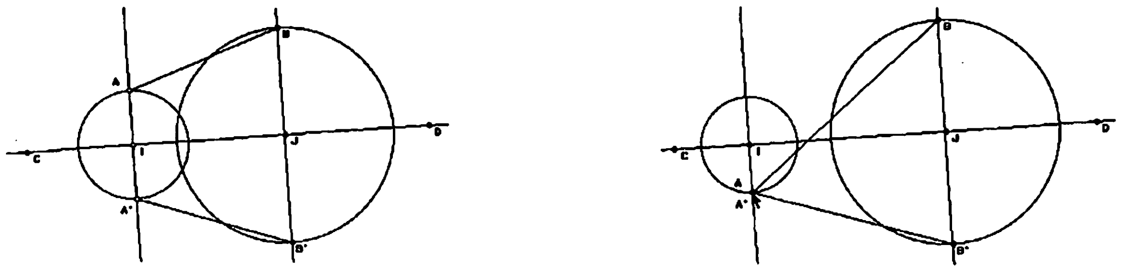
Prinzip 4: ***Reversibilität***
Unter dem Blickwinkel der Suche nach einem System, das die wissenschaftliche Exploration unterstützt, haben mehrere Autoren auf die Forderung verwiesen, dass die Möglichkeit beliebiger Exploration nicht dazu führen sollte, dass der Benutzer bestimmte Veränderungen vermeidet, weil er fürchten muss, den Ausgangszustand nicht wiederherstellen zu können. Folglich soll nach der Bewegung eines Zeichnungselementes aus der Position 1 in eine Position 2 das System so reagieren, dass die "inverse" Manipulation des Elementes von Position 2 nach Position 1 den kompletten Ausgangszustand der Zeichnung wieder herstellt.

Die oben formulierten Prinzipien sind recht allgemein. Beim gegenwärtigen Erkenntnisstand bzgl. der Dynamischen Geometrie muss man sich diese so vorstellen, dass man sich zwar auf diese Prinzipien beziehen, sogar berufen kann, allerdings alle vorhandenen Dynamischen Geometrie Systeme (DGS) diese Prinzipien nicht vollständig realisieren.

5 Die Prinzipien der Dynamischen Geometrie in verschiedenen DGS

Die folgenden Situationen geben Beispiele dafür, wie bzw. inwieweit verschiedene DGS die in Abschnitt 4 angeführten Prinzipien realisieren bzw. teilweise verwirklichen. Dabei werden Cabri-géomètre [Laborde & Bellemain], Cinderella [Richter-Gebert & Kortenkamp] und Geometer's Sketchpad [Jackiw] betrachtet.

Das Prinzip der mathematischen Konsistenz ("**Prinzip 0**" des vorigen Abschnittes) ist natürlich für die Dynamischen Geometrie Systeme grundlegend. Es ist nämlich die Basis für das Vertrauen eines Anwenders in das von ihm benutzte System. Sollte mit Hilfe eines DGS modelliert werden, wie es schon der Fall in verschiedenen Industriezweigen ist, so ist dieses Prinzip unabdingbar. Allerdings haben zahlreiche Nutzer von Geometer's Sketchpad feststellen müssen, dass dieses Prinzip von dieser Software nicht immer erfüllt wird:



Eine mögliche Konstruktion des gespiegeltes Bildes *A'B'* von *AB* und was geschieht, wenn *A* durch *CD* läuft.

Abb. 5: Begrenzte mathematische Konsistenz in manchen DGS

In vielen DGS, u.a. vielen aus Frankreich und auch in Geometer's Sketchpad erzeugt man leicht mit Schülern folgende Situation: Man möchte die Strecke *AB* an *CD* spiegeln. Dafür konstruiert man die Senkrechte zu *CD* durch *A* mit Fußpunkt *I* und dann den Kreis um *I* durch *A*. Als „unteren" Schnittpunkt dieses Kreises mit der Senkrechten erzeugt man den Punkt *A'*. Die gleiche Konstruktion wird dann mit *B* ausgeführt. Man würde erwarten, dass die Strecke *A'B'* beim Variieren der Punkte *A* oder *B* immer das Spiegelbild von *AB* bleibt. Wenn aber der Punkt *A* (wie rechts) die Linie *CD* passiert, ist das nicht mehr der Fall ...
Dieses Verhalten folgt oft aus einer Behandlung der Schnittpunkte von Kreis/Linie oder Kreis/Kreis, die mathematisch nicht tief genug ist. Allerdings ist dieses Problem nicht so einfach, und zur Zeit ist zum Beispiel Cabri-géomètre nicht fähig, die entsprechenden Schnittpunkte von Kegelschnitten in vollkommen befriedigender Weise zu behandeln.

Demgegenüber erfüllt Geometer's Sketchpad am besten das Prinzip der direkten Manipulation (**"Prinzip 1"**). Diese Software reagiert am flexibelsten auf Veränderungen der Zeichnung durch den Nutzer, allerdings mit der Folge, dass der Nutzer bei Veränderung im Konstruktionsbaum "tief" positionierter Elemente (d.h. bei für die Konstruktion grundlegenden Elementen) die Bedeutung der direkten Manipulation nicht mehr kontrollieren kann, weil das von ihm bewegte Objekt nicht mehr dem Mauszeiger, sondern einer anderen, ihm möglicherweise unverständlichen Logik folgt (vgl. das Beispiel des Höhenschnittpunktes im Abschnitt 2).

Hier sollte man hinzufügen, dass Cabri mit der Möglichkeit des Umdefinierens von Objekten einen (zwar indirekten) Weg gibt, um einige der Nachteile einer Konzeption vom strengen konstruktiven Typ etwas zu vermeiden. In den meisten Fällen ist es möglich, die konstruktive Abhängigkeit von den verschiedenen Objekten zu ändern, wenn auch es klar bleiben sollte, dass zur Zeit Cabri viel mehr konstruktiv als deklarativ ist.

Prinzip 2 ist natürlich sehr generell, und man kann immer zeigen, dass die eine oder andere Software Prinzip 2 nicht erfüllt. Ich möchte hier folgende Beispiele nennen:

In Cabri (Macintosh-Version) wollen wir ein Maß auf eine der Koordinatenachsen übertragen. Das braucht man z.B., um den Graphen einer Funktion zu erzeugen.

Der Benutzer erwartet wahrscheinlich, dass er durch das Bewegen der Einheit der Achse die Größe des Graphen ändern kann (etwa wie durch ein „Zoom"). Aber die Übertragung verwendet „echte" Zentimeter und folgt der Einheit der Achsen nicht – und daher ändert sich der Graph (leider) nicht. In der Windows-Version wurde das verbessert und funktioniert wie von den meisten Nutzern erwartet. (Auf dem Macintosh ist natürlich eine kompliziertere Konstruktion immer möglich, wenn man dasselbe Verhalten eines Graphen erreichen will.)

In Geometer's Sketchpad funktioniert die eingebaute Spiegelung einer Strecke an einer Geraden nicht wie ihre „manuelle" Realisierung (vgl. Abb. 5). Für einen Mathematiker ist aber wahrscheinlich unerwartet, was passiert, wenn allein die Strecke gespiegelt wird. Man bekommt hier die Darstellung einer Strecke, aber ohne ihre Endpunkte. Das heißt gewissermaßen, dass eine Strecke „unabhängig" von ihren Endpunkten existiert, was dem gewöhnlichen euklidischen Konzept von Strecke nicht entspricht.

In der heutigen Version von Cinderella gibt es keine richtige Implementation des mathematischen Konzepts einer Strecke.[2] Ein Grund dafür ist zum Teil die Design-Entscheidung, das Verhalten der Figuren auf projektiver Geometrie beruhen zu lassen. (Wie das in Cinderella realisiert ist, zeigt viel Eleganz, wenn auch einige Nachteile, wie schon bemerkt.) Es gibt jedoch in Cinderella zwei Wege, um trotzdem den Eindruck von Strecken zu vermitteln. Der erste nützt die Möglichkeit, eine Linie an ihren äußersten explizit benutzen Punkten graphisch enden zulassen (Line-Clipping). Hierbei hat jemand, der (schon) ein Mathematiker ist, wahrscheinlich kein Problem. Der zweite Weg ist die Anwendung des Software-Kommandos „Draw a Segment" (vorletztes Kommando in der Menuleiste). Hier bekommt man die Graphik einer Strecke, aber wenn man einen Punkt zur selben Zeit auf eine Gerade und auf eine solche Strecke legen will, ist die Rückmeldung dieselbe wie im Falle von zwei Linien: die beiden Objekte glänzen und der Benutzer ist auf diese Weise informiert, dass der nächste Punkt als Durchschnitt der beiden Objekten konstruiert wird. Das ist aber hier nicht der Fall, weil diese Art von implementierten Strecken in Cinderella keine geometrischen Objekte sind, sondern eigentlich nur graphische Cinderella-Objekte, obwohl natürlich die Erwartung (und der Glaube) der meisten Benutzer anders ist.

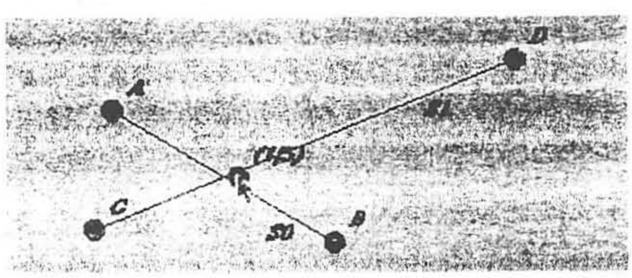


Abb. 6

Die Abbildung 6 zeigt die Rückmeldung von Cinderella, wenn der Nutzer einen neuen Punkt in der Nähe des scheinbaren Durchschnittpunkts von zwei Cinderella Strecken hinlegen will. Der aktuell erzeugte Punkt wird nicht der Schnitt, sondern ein normaler freier Punkt sein.

Man könnte sowohl für Cabri wie auch für Cinderella oder Geometer's Sketchpad viele weitere Beispiele nennen. Man muss aber annehmen, dass der höhere Inhalt der von Prinzip 2 abhängigen Ergonomie (*What You See Is What You Expect*) sehr mächtig ist und daher sehr kostspielig zu realisieren ist. Ich betrachte dieses Prinzip als einen Weg zu selbst erklärender Software, für die Gebrauchsanweisungen dann fast unnötig sind und die Entdeckungen und das Lernen stark erleichtern können. Man braucht aber sehr große Bemühungen, um dies zu erreichen, und meiner Meinung nach hat man hier einen Hinweis, warum gute Software-Entwicklung die Benutzerschnittstelle vom Inhalt der Software nicht trennen sollte. Bei dynamischer Geometrie ist die Mathematik zusammen mit dem Verhalten der Software zu betrachten (*die Verformung der Figuren nach dem Willen und der Kontrolle des kognitiven Nutzers*).

---

[2] Nach Auskunft der Autoren wird dies derzeitig überarbeitet.

Das Prinzip der Kontinuität ("**Prinzip 3**") ist von mehreren Autoren in verschiedener Hinsicht kommentiert worden. Dabei ist schon historisch interessant, dass sich bereits bei Poncelet ein solches Prinzip findet, wie Kortenkamp jüngst in seiner Dissertation [Kortenkamp 1999] hervorgehoben hat. Eine schnelle Lektüre dieser Dissertation könnte glauben machen, dass Cabri-géomètre wie Geometer's Sketchpad diese Forderung weniger gut erfüllen als Cinderella. Um zu belegen, dass die Situation tatsächlich ein wenig komplizierter ist, sollen zwei Beispiele angeführt werden.

Im ersten Beispiel hat man zwei Kreise k_1 und k_2 um die Punkte O und O'. Bewegt man den Mittelpunkt O' von k_2 auf einem Durchmesser von k_1, so erhält man bei geeigneter Lage einen Schnittpunkt dieser beiden Kreise, den wir A nennen wollen. P sei ein Schnittpunkt von k_1 mit der Senkrechten in O zu dem Durchmesser von k_1.

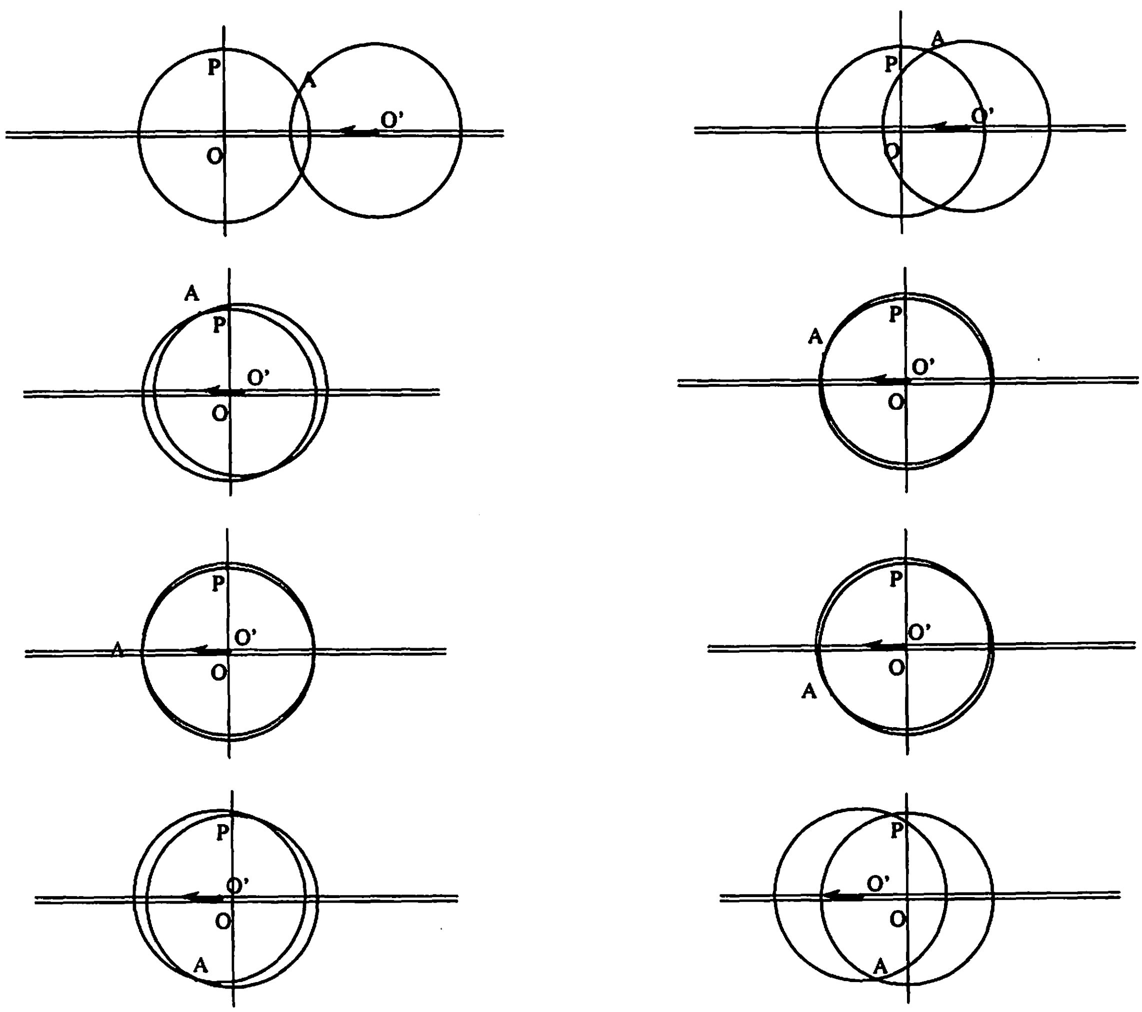


Abb. 7

Das Durchfahren von O' über O in 8 Schritten. Hier sieht man, wie Punkt A eigentlich in „kontinuierlicher" Weise von oben nach unten springt. Dass A auch im Fall, dass der Abstand der beiden Gerade 0 ist, von oben nach unten springt, entspricht dem Grenzfall.

Betrachtet man nun das Verhalten von A, wenn der Mittelpunkt O' (und damit der Kreis k_2) weiter in Richtung O und darüber hinaus bewegt wird, so ergeben sich unterschiedliche Verhaltensweisen in verschiedenen DGS: In Cabri-géomètre und Geometer's Sketchpad springt der Punkt A (etwa von "oben" nach "unten"), wenn man "durch" den Punkte O fährt (vgl. die obige stehende Folge von Zeichnungen in Abbildung 7), während der Punkt in Cinderella in der Nähe von P bleibt. Bewegt man dagegen den Mittelpunkt O' auf einer Parallelen zum Durchmesser von k_1 mit geringem Abstand von diesem Durchmesser, ändert sich das Verhalten von A in Cabri-géomètre und Geometer's Sketchpad nicht, während in Cinderella der Punkt A "springt", während O' die Nachbarschaft von O durchquert. Oder: Cabri-géomètre und Geometer's Sketchpad realisieren bei verschwindendem Abstand der Parallelen den Grenzfall in gleicher Weise wie vor Erreichen des Grenzwertes, während Cinderella erst im Grenzfall des verschwindenden Abstandes der Parallelen ein bestimmtes Verhalten realisiert.

Für das zweite Beispiel werden wiederum die Schnittpunkte A und B zweier Kreise (diesmal mit den Mittelpunkten C und D) betrachtet, während man D in Bezug auf C variiert.

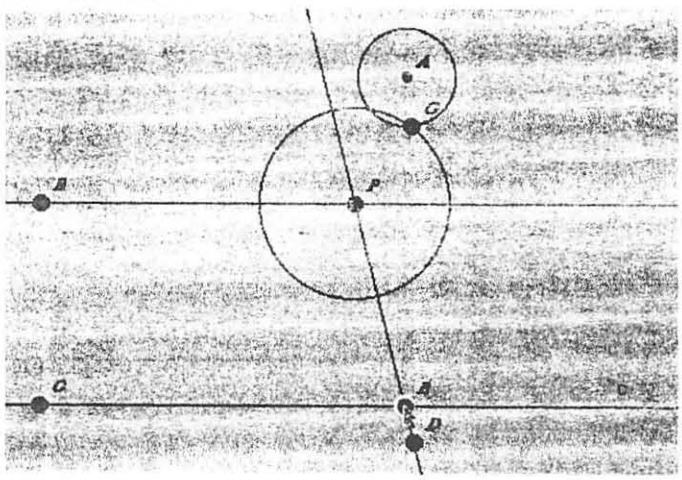


Abb. 8

In dieser Konstruktion (in Cinderella) kann man dem Schnittpunkt G von zwei Kreisen mit Zentrum A und F mit kontrollierbarer „Geschwindigkeit" folgen, wenn man zum Beispiel F von links nach rechts bewegt (hier ist E ein freier Punkt auf c, und F ist der Durchschnitt von DE mit c. Dafür hat man eine erste Hilfsgerade, so dass der Weg von F wohlbestimmt ist (nämlich eine Gerade durch B). Die Bewegung von F induziert man durch das Bewegen von E auf einer anderen Linie. Dies erhöht möglicherweise die Geschwindigkeit von F (man bedient so F mit „indirekter" Manipulation durch E). Beim langsamem Bewegen von F (durch E) von ganz links nach ganz rechts und dann zurück folgt eventuell die entsprechende Bewegung von G der Bewegung von F (beide in die selbe Richtung). Wenn aber einmal die Geschwindigkeit von F groß genug ist, wird die Singularität übersehen, und wenn man dann wieder langsam F bedient, laufen F und G nicht mehr in der selben Richtung: die verlangte Kontinuität ist verletzt.

Die sichtbarste Folge der Design-Entscheidung von Cinderella ist die Tatsache, dass die Bezeichnungen der beiden Schnittpunkte bei jedem neuerlichen Auftauchen nach genügend weiter Bewegung vertauscht werden. Das Prinzip der Reversibilität ist verletzt, man muss zweimal hin und her fahren, um zur Anfangskonfiguration zurückzukehren. Es ist dann ein Leichtes, dieses Verhalten mehrfach zu erzeugen und somit 2n-malige Bewegungen nötig zu machen, um den Anfangszustand zu erreichen (wie zum Beispiel mit Schnittpunkten zweier beliebiger Kegelschnitte).

Die Forderung der Reversibilität hat noch einen anderen Aspekt, wenn man beachtet, dass der dargestellte Zustand, die Zeichnung, gleich sein sollte, egal auf welchem "Weg" man durch Bewegen zu ihm gelangt ist. Cinderella - folgt man der Dissertation von [Kortenkamp 1999] - vermeidet bei Mehrfach-Schnittpunkten (beispielsweise von Kreisen) systematisch die im Zugmodus entstehenden Singularitäten durch lokales Umfahren im Komplexen. So wie die Dinge zur Zeit liegen, wird dieser Umweg über komplexe Zahlen zur Zeit dann genommen, wenn ein bestimmtes numerisches Kriterium erfüllt ist. Bei einer schnellen Bewegung kann diese Singularität allerdings aufgrund der Rechenkapazität der Maschine "übersehen" werden, was zum Auftauchen der Schnittpunkte in unveränderter Anordnung führt und das Prinzip der Kontinuität verletzt, dem sich Cinderella explizit verschrieben hat.

Unter diesem Blickwinkel erscheint Dynamische Geometrie als ein Feld interdisziplinärer Forschung mindestens von Mathematik, Informatik und Mathematikdidaktik, allgemeiner: "cognitive sciences". Durchaus unterschiedliche Zugänge und Sensibilitäten führen dabei zu unterschiedlichen Sichtweisen und manchmal auch zu Streit. Dabei ist die Frage durchaus offen, ob es möglich oder nützlich ist, eine einheitliche Doktrin für die Dynamische Geometrie zu entwickeln, jedenfalls bleibt wichtig, dass sich aus diesen verschiedenen Orientierungen eine präzise und kritische Wissenschaft entwickelt. Auf lange Sicht profitieren so am ehesten die Geometrie, allgemeiner die Mathematik und das Lehren und Lernen von Mathematik.

Literatur

Allen Richard J., Trilling Laurent: *Dynamic Geometry and Declarative Geometric Programming*, in Geometry Turned On, Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research, MAA notes 41, J. King, D. Schattschneider Eds, Washington DC (1997) pp. 193-97

Clairaut Alexis: *Elemens de géométrie*, Lambert & Durand, Paris 1741

Hilbert David (1899): *Grundlagen der Geometrie*, Teubner Verlag, Leipzig 1903

Jackiw Nick: *The Geometer's Sketchpad*, Key Curriculum Press, 1991 - 2001, Berkeley, CA, http://www.keypress.com/sketchpad

Kortenkamp Ulrich: *Fondations of Dynamic Geometry PhD*, Dissertation ETH, Zürich 1999 http://www.cinderella.de

Laborde Jean-Marie: *Exploring Non-Euclidean Geometry in a Dynamic Geometry Environment Like Cabri-géomètre*, in Geometry Turned On, Dynamic Software in Learning, Teaching, and Research, MAA notes 41, J. King, D. Schattschneider Eds, Washington DC (1997) pp. 185-91

Laborde Jean-Marie, Bellemain Franck: Cabri-géomètre, 1994-2001, ©Texas Instruments 1994-2001, ©1987-2001 Université Joseph Fourier-CNRS, ©2001 CabriLog, Software http://www.cabri.net, http://www.ti.com/calcs, http://www.cabrilog.com

Laborde Jean-Marie: *Some Issues raised by the Development of Implemented Dynamic Geometry as with Cabri-géomètre*, Proceedings of the 15th European Workshop on Computational Geometry, INRIA 1999 http://www.inria.fr/rapportsactivite/RA99/prisme or http://www.cabri.net

Legendre Adrien-Marie, Blanchet: *Eléments de géométrie*, Didot, 2te u. 15te Edition, Paris1848

Poncelet Jean-Victor, *Traité des propriétés projectives des figures, ouvrage utile à ceux qui s'occupent des applications de la géométrie descriptive et d'opérations géométriques sur le terrain*, 1822, Paris, Gauthiers-Villars (1865)

Richter-Gerbert Jürgen, Kortenkamp Ulrich, *The Interactive Geometry Software Cinderella*, Software, Springer Verlag, 1999, http://www.cinderella.de

Die Behandlung von Funktionen einer reellen Variablen mit Methoden der dynamischen Geometrie

Heinz Schumann, Weingarten

Die Theorie und die Praxis des computer-unterstützten Mathematikunterrichts war bisher stets ein Reflex auf den jeweilig als das Nonplusultra gepriesenen Software-Entwicklungsstand.

Abstract: Methods of Dynamic Geometry, which are characterized above all by direct mani-pulation and generation of geometric objects, applicated to the following instructional topics: "Elementary Functions", "Functional Relations in Geometric Figures" and "Geometric Extreme Value Problems" open up new possibilities of teaching and learning functional thinking. These possibilities aid dynamic imagination about functions and help to overcome the weaknesses of traditional media and deficits of traditional design of instruction. They reinforce the connection between elementary geometry and school algebra.

1 Einleitung

Neben die herkömmlichen Repräsentationsformen von Geometrie tritt heute die computerrepräsentierte Darstellung (Diagramm 1); – die Film-/Video-Darstellung kann zur computerrepräsentierten Darstellung gezählt werden. – Auf die sich ergebenden Schnittstellenprobleme zwischen den verschiedenen Repräsentationsformen soll hier nicht eingegangen werden.

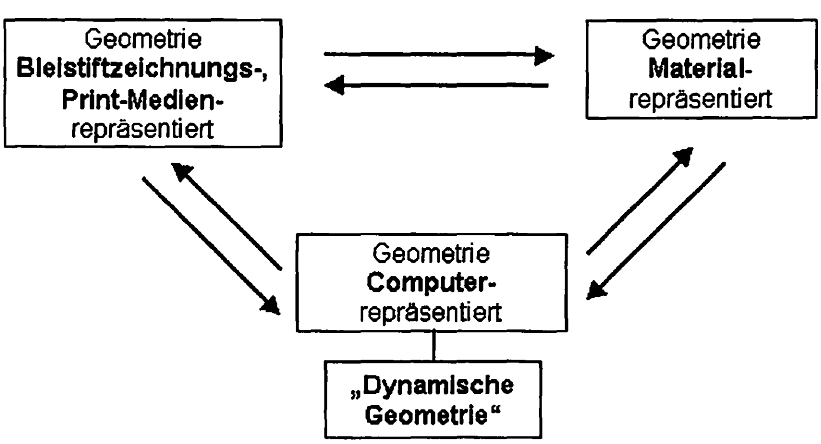


Diagramm 1

Unter den aktuellen Formen computerrepräsentierter Geometrie nimmt die Dynamische Geometrie bzw. die Zug-Modus-Geometrie (vgl. u.a. Schumann 1991) im Rahmen des computerunterstützten Mathematikunterrichts und der mathematikdidaktischen Diskussion eine führende Rolle ein.

Die Verwendung Dynamischer Geometrie-Systeme (DGS), die über einen entsprechenden Umfang an Optionen verfügen und die den aktuellen software-ergonomischen Standards genügen, führt zu neuen Methoden, (ebene) Elementargeometrie zu lehren und zu lernen bei der

- Aneignung geometrischer Begriffe und Sätze
- Lösung geometrischer Konstruktionsaufgaben
- Lösung geometrischer Berechnungsaufgaben
- Behandlung und Anwendung der Abbildungsgeometrie
- Untersuchung und Anwendung von Relationen an geometrischen Figuren
- Verbindung von synthetischer und analytischer Geometrie
- Behandlung elementarer Funktionen
- geometrischen Modellierung und Simulation von Ausschnitten der Realität
- ästhetischen Gestaltung von und mit geometrischen Figuren
- ...

DGS unterstützen folgende allgemeine Methoden der Heuristik/Erkenntnisfindung:

- die induktive Methode
- die operative Methode
- das Generalisieren und Spezialisieren
- das Konkretisieren
- "Trial and Error"
- das experimentelle Arbeiten
- die Komplexitätsreduktion
- das modulare Arbeiten
- das Rückwärtsarbeiten
- ...

DGS begünstigen, wie auch andere Computerwerkzeuge, die inhaltliche Anreicherung („Enrichment") und die methodische Verstärkung („Reinforcement"), – als „kognitives Werkzeug" – die Ökonomie intellektueller Arbeit, insbesondere die Reorganisation.

DGS unterstützen die Selbststeuerung des Lerners sowie konstruktivistische Erkenntnisprozesse, die, grob gesehen, in den Phasen: „Epistemischer Konflikt – Selbstreflektion – Selbstkorrektur" ablaufen (Schumann 2000c).

Die Anwendung von Methoden der dynamischen Geometrie stellt eine neue Verbindung zwischen synthetischer Geometrie und den Funktionen einer reellen Variablen her bei der

- Dynamischen Behandlung elementarer Funktionen
- Dynamischen Untersuchung funktionaler Beziehungen an geometrischen Figuren
- Dynamischen Entdeckung geometrischer Extremwertaufgaben.

2 Die Behandlung von Funktionen einer reellen Variablen mit Methoden der dynamischen Geometrie

Zur dynamischen Behandlung von Funktionen und ihrer Schaubilder eignet sich besonders CABRI Géomètre II (Laborde et al. 1996), das sicherlich aus software-ergonomischer und geometrie-inhaltlicher Sicht als das am weitesten entwickelte interaktive Werkzeug für die (ebene) Geometrie bezeichnet werde kann. Im folgenden beziehen wir uns auf dieses System; andere interaktive Geometriewerkzeuge sind für unsere Zwecke weniger oder nicht geeignet.
Wenn wir davon ausgehen, dass die Schüler und Schülerinnen Novizen in der Nutzung eines geometrischen Computerwerkzeugs sind, so stellen wir die Bildschirm-Konfigurationen zusammen mit den Aufgabentexten als „interaktive Arbeitsblätter" (Schumann 1998b), die auch zu Demonstrationszwecken verwendet werden können, zur Verfügung. Der Einsatz solcher Arbeitsblätter bietet einen ersten Zugang zur dynamischen Behandlung von Funktionen und funktionalen Beziehungen an geometrischen Figuren sowie von geometrischen Extremwertaufgaben.

2.1 Dynamische Behandlung elementarer Funktionen

Behandlungsmöglichkeiten elementarer Funktionen einer Variablen sind die

- dynamische Generierung des Schaubildes
- dynamische Untersuchung mit Schaubildcursor
- dynamische Variation der aktualen Funktionsparameter
- dynamische Manipulation des Schaubildes
- dynamische Komposition von Funktionen
- dynamische Bildung der Umkehrfunktion
- dynamische Modellierung mit Funktionsschaubildern
- ...

Der Übergang zwischen den Standardrepräsentationen von Funktionen kann dynamisch gestaltet werden (Diagramm 2).

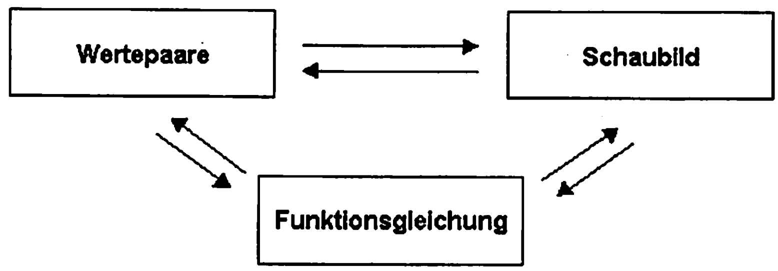


Diagramm 2

Fragestellungen:

Wie wirkt sich die direkt manipulative Veränderung des Schaubildes auf die Funktionsgleichung/Wertepaare aus?

Wie wirkt sich die direkt manipulative Veränderung der Funktionsgleichung auf das Schaubild/Wertepaare aus?

Wie wirkt sich die direkt manipulative Veränderung von Wertepaaren auf das Schaubild/die Funktionsgleichung aus?

(Vgl. Schumann 1998a)

Im Einzelnen:

Dynamische Generierung des Schaubildes

Aufstellung des Funktionsterms in Abhängigkeit von der variierbaren Abszisse; Konstruktion von (x; f(x)); Erzeugen des Schaubildes als Punktespur durch Verziehen von (x; 0); anschließend interpolatives Erzeugen des „durchgezogenen" Schaubildes als referenzierbare Ortskurve.

Dynamische Untersuchung mit Schaubildcursor

Untersuchung des Schaubildes/der Funktion mittels direkter Manipulation des Funktionscursors (einem auf dem Schaubild laufenden, verziehbaren Punkt) zur näherungsweisen und wechselseitigen Bestimmung besonderer x- und y-Werte (wie z. B. Nullstellen, Extremstellen, ...), wahlweise mit Ausgabe in eine Wertetabelle.

Anmerkung: Im Rahmen der Differentialrechnung geht das natürlich auch für die Untersuchung der Steigung bei mitlaufender Tangente.

Dynamische Variation der aktualen Funktionsparameter

Untersuchung des Schaubildes nach Form und Lage in Abhängigkeit von den Funktionsparametern anhand einer direkt manipulativen Versuchsanordnung (direkt manipulative oder automatisch-animative Variation der Parameterwerte mittels Schieber und Erzeugung von Ortskurven besonderer Punkte und von Kurvenscharen).
Fragestellung: Wie ändern sich die Form und/oder die Lage des Schaubildes bei interaktiver Variation eines aktualen Parameters und Konstanz der anderen?

Beispiele in Abbildung 1 und 2.

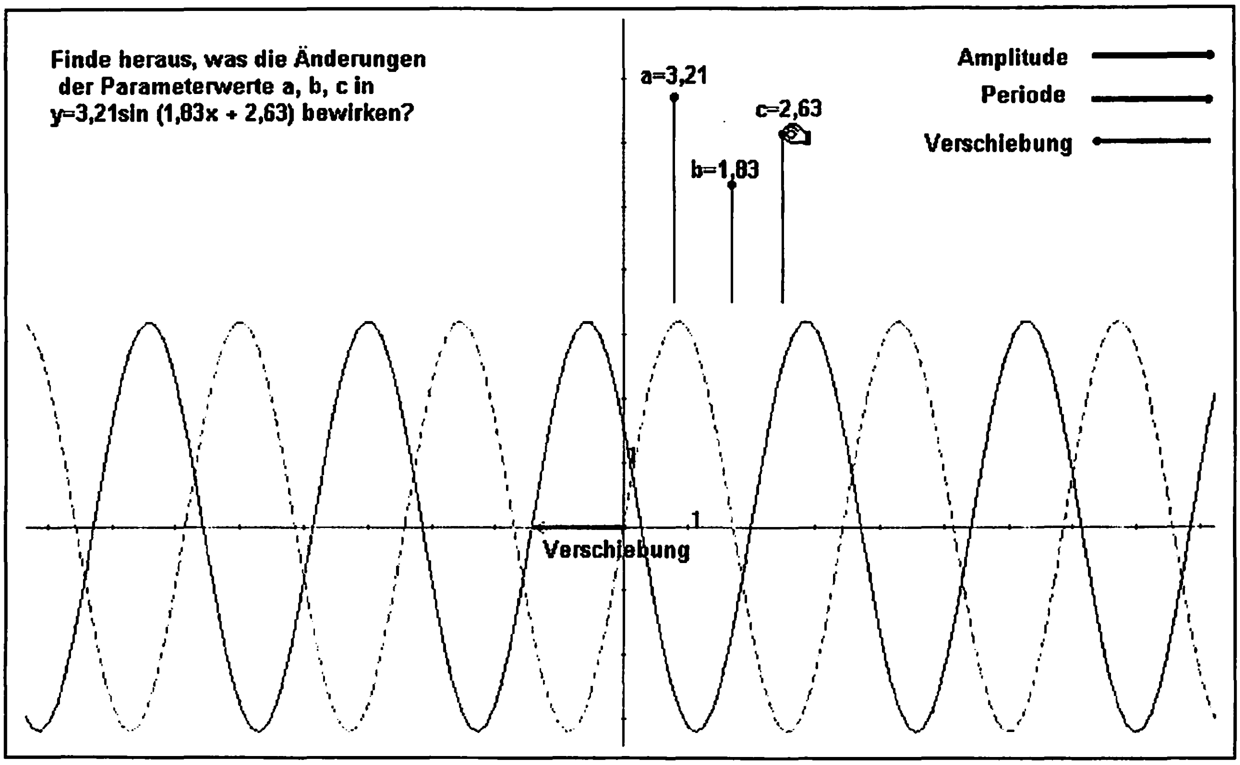


Abb. 1

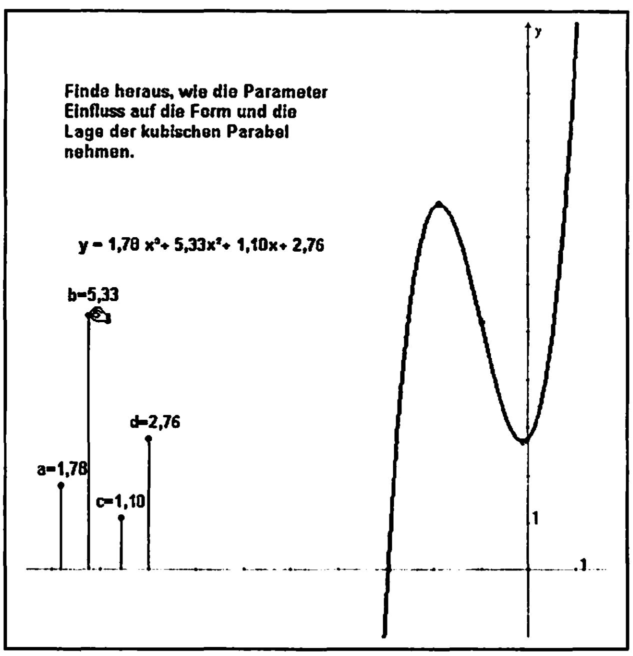


Abb. 2

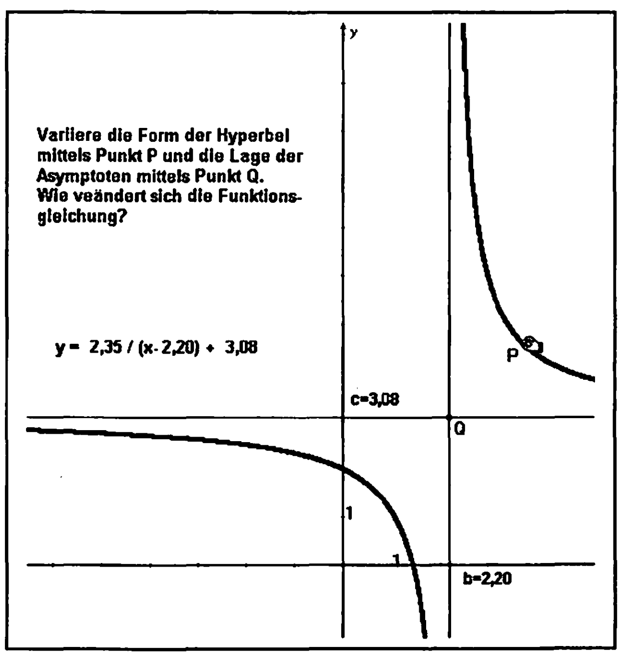


Abb. 3

Dynamische Manipulation des Schaubildes

Untersuchung der Funktionsgleichung nach Veränderung ihrer Parameter in Abhängigkeit von der Form und Lage des Schaubildes anhand einer interaktiven Versuchsanordnung (direkt manipulative Variation der Position von Referenzpunkten des Schaubildes, die seine Form und/ oder Lage verändern).
Fragestellung: Wie ändern sich die Parameterwerte in der Funktionsgleichung bei direkt manipulativer Variation der Position der Lage- oder der Form-Referenzpunkte?

Beispiel in Abbildung 3.

Dynamische Komposition von Funktionen

Generierung des Schaubildes einer Funktion durch dynamisches Zusammensetzen der Schaubilder seiner einfachen Funktionsbausteine.

Dynamische Bildung der Umkehrfunktion

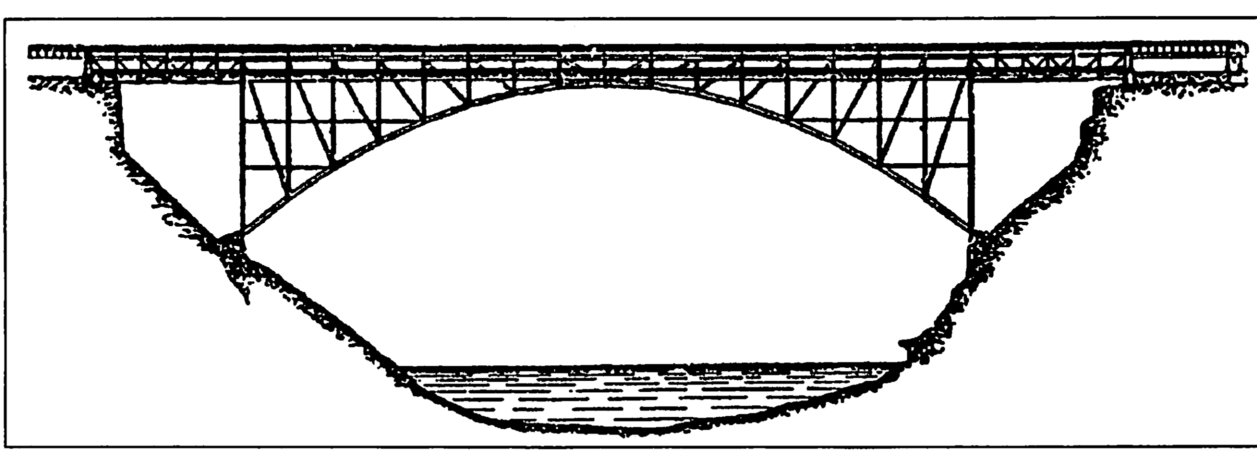
Generierung des Schaubildes der Umkehrfunktion durch Spiegelung des Funktionsschaubildes an der ersten Winkelhalbierenden und "Übereinstimmungstest" mit dem, über die Gleichung der Umkehrfunktion erzeugten Schaubild.

Dynamische Modellierung mit Funktionsschaubildern

Untersuchung von Bildern realer Objekte auf das Enthaltensein eines Funktionsschaubildes und Bestimmung der betreffenden Funktionsgleichung durch experimentelle Anpassung des eingefügten Schaubildes an das im Bild implizit vorhandene.

Beispiel in Abbildung 4.1-3.

Schumanns CabriJava-Demo: Brückenbogen-Modellierung



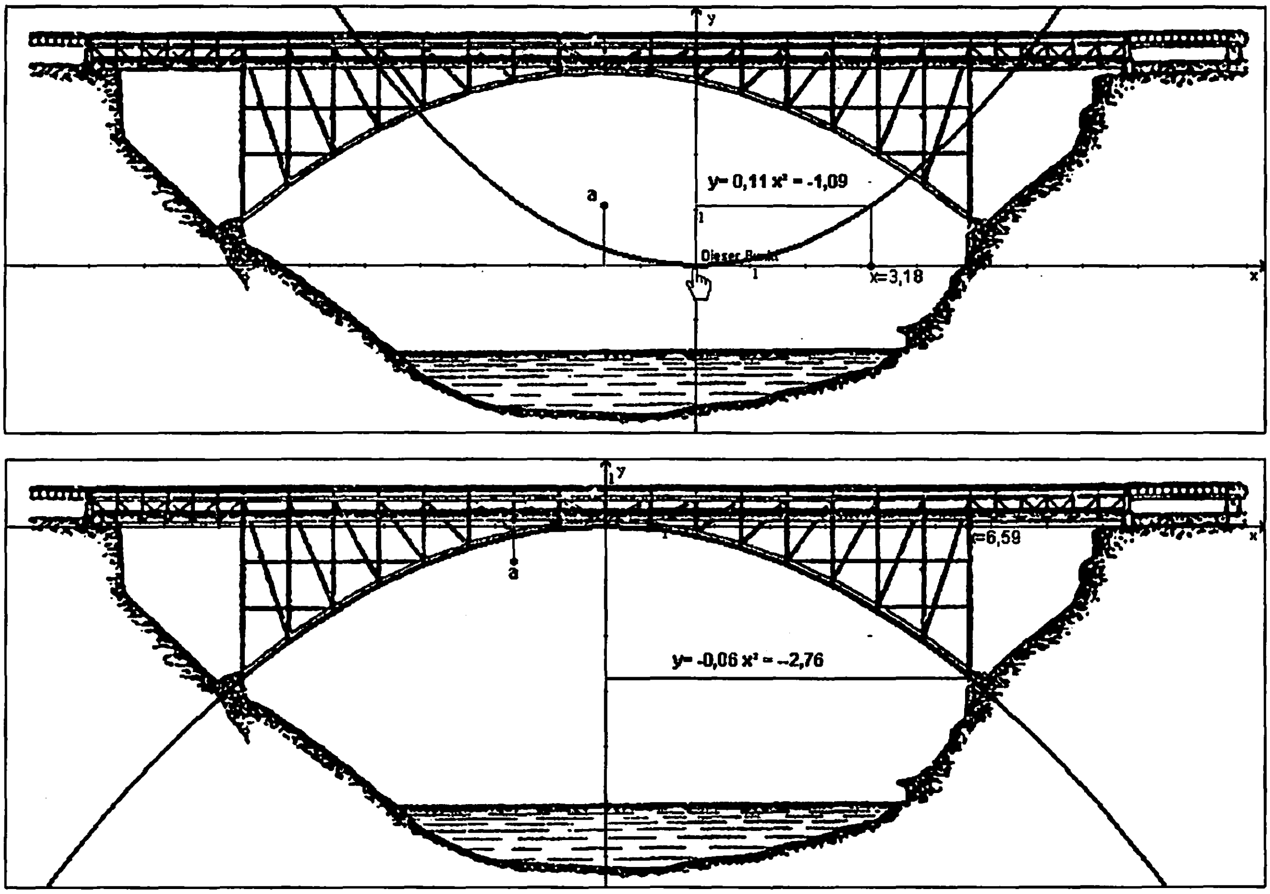


Abb. 4.1-3

2.2 Dynamische Untersuchung funktionaler Beziehungen an geometrischen Figuren

Die Untersuchung geometrischer Figuren auf funktionale Beziehungen hin motiviert die Entwicklung von Funktionsgleichungen aus Messfunktionen.

Untersuchung von Funktionen (einer Variablen) an geometrischen Figuren gemäß folgender Methode:

(1) Konstruktion einer geometrischen Figur bzw. Teilfigur unter der Bedingung, dass eine gewählte Größe (als Messwert oder Term aus Messwerten) von einer zu variierenden Größe abhängt.

(2) Darstellung des Funktionszusammenhangs zwischen unabhängiger Größe und von ihr abhängigen Größe als referenzierbares Schaublid einer Messfunktion.

(3) Interpretation des Schaubildes der Messfunktion (auch Beobachtung der Schaubild-Charakteristik bei Variation der Figurendimensionierung und Vergleich mit anderen Schaubildern).

(4) Herleitung der Gleichung für die Messfunktion, die im empirischen Schaubild dargestellt ist.

(5) Kontrolle der hergeleiteten Funktionsgleichung durch Erzeugung ihres Schaubildes (Kongruenz von Schaubild der Messfunktion und analytischem Schaubild).

(6) Diskussion der hergeleiteten Funktionsgleichung (besondere Stellen und Werte, wie z.B. Extremstellen und -werte).

(Vgl. Schumann 1995/2000a)

2.3 Dynamisches Entdecken von Extremwertaufgaben

Die Untersuchung geometrischer Figuren auf extremale Eigenschaften induziert (allgemeine) Extremwertaufgaben, die mit/ohne Hilfe von Computeralgebra gelöst werden können.
Aus dieser Möglichkeit, funktionale Eigenschaften einer Figur zu untersuchen, ergibt sich folgende Methode zur Entdeckung von extremalen Eigenschaften und zur näherungsweisen Bestimmung von Extremwerten:

(1) Konstruktion einer geometrischen Figur, die auch Nebenbedingungen erfüllt.

(2) Variation einer unabhängigen Größe der Figur bwz. Teilfigur unter Beobachtung eines funktionalen Zusammenhangs: unabhängige Größe - abhängige Größen (Datensammlung in Werte-Tabelle; grafische Darstellung im Schaubild).

(3) Erkennen einer extremalen Eigenschaft (näherungsweises Bestimmen von Extremstelle und Extremwert).

(4) Variation der Figurenparameter und Prüfung, ob extremale Eigenschaft invariant

(5) Formulierung einer allgemeinen geometrischen Extremwertaufgabe.

Jetzt erst schließt sich die exakte Lösung der betreffenden allgemeinen Extremwertaufgabe mittels Differentialrechnung (z.B. unter Einsatz von Computeralgebra) oder mittels elementarer Methoden an. –Diese Methode ist präformal, da sie im allgemeinen nicht das Aufstellen einer Zielfunktion notwendig macht, aber trotzdem gestattet, die Zielfunktion als eine Messfunktion auf extremale Eigenschaften hin zu untersuchen (vgl. Schumann 1998c/2000b).

3 Computerunterstützte Behandlung ebener (algebraischer) Kurven

Wir schließen mit einem generalisierenden Ausblick auf die computerunterstützte Behandlung ebener Kurven.

Die Untersuchung von Ortskurven besonderer Punkte, die sich aufgrund von Konstruktionsvorschriften ergeben, wird durch ihre computergrafische Darstellung in Form referenzierbarer Objekte unterstützt (Diagramm 3). Umgekehrt kann bei Verfügbarkeit dieser Darstellung die ihr zugrunde liegende Konstruktionsvorschrift reproduziert werden.

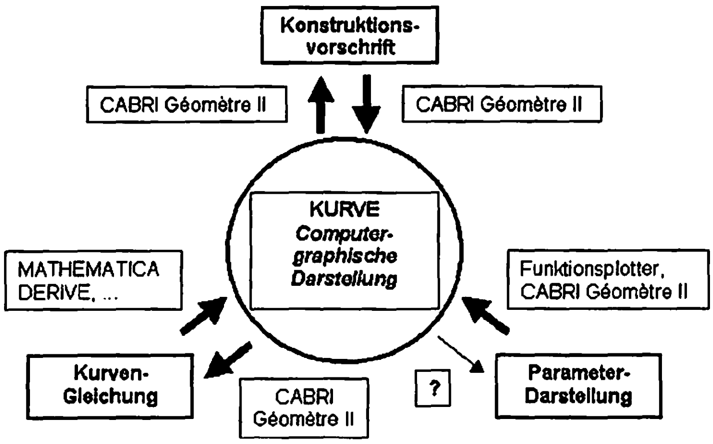


Diagramm 3

Soll nun für die computergrafische Darstellung einer Kurve ihre algebraische Darstellung in der Form F(x; y)=0 herausgefunden werden, so generiert CABRI II approximativ eine solche Gleichung, deren Richtigkeit u.a. mittels MATHEMATICA bzw. DERIVE überprüft werden kann.

Für die Bestimmung einer Parameterdarstellung aus der computergrafischen Darstellung existiert wohl noch kein approximativer Algorithmus, sodass der Umweg über die Gleichung F(x; y)=0 bzw. die Konstruktionvoschrift genommen werden muss. Jede Kurve, deren Parameterdarstellung gegeben ist, kann natürlich mit CABRI II bzw. einem geeigneten Funktionsplotter computergrafisch dargestellt werden; allerdings verfügt man dann noch nicht über eine entsprechende elementargeometrische Konstruktionsvorschrift.

Literatur

Laborde, J.-M.; Bellmain, F. (1996): Cabri Géomètre II. Version 1.0 - Dallas/USA u. Freising: Texas Instruments. (Deutsche Oberfläche und Bearbeitung des Handbuchs von H. Schumann)

Schumann, H. (1991): Schulgeometrisches Konstruieren mit dem Computer. - Stuttgart: Metzler u. Teubner

Schumann, H. (1995): Funktionale Eigenschaften einer geometrischen Figur darstellen und untersuchen mit Cabri II im TI-92. In: TI-Nachrichten, Heft 2, S. 6/7

Schumann, H.(1998a): Dynamische Behandlung elementarer Funktionen. - In: Mathematik in der Schule (36), Heft 3, S. 172-188

Schumann, H.(1998b): Interaktive Arbeitsblätter für das Geometrielernen. – In: Mathematik in der Schule (36), Heft 10, S. 562-569

Schumann, H. (1998c): Geometrische Extremwertaufgaben in dynamischer Behandlung. – In: ZDM Zentralblatt für Didaktik der Mathematik 30(6), S. 215-223

Schumann, H.(2000a): Computerisierte Behandlung funktionaler Beziehungen an geometrischen Figuren. – In: Mathematik in der Schule (38), Heft 2, S. 109-119

Schumann, H.(2000b): Computerunterstützte Behandlung geometrischer Extremwertaufgaben. – Hildesheim: Franzbecker

Schumann, H.(2000c): FOR THE DESIGN OF A COMPUTER INTEGRATING GEOMETRY CURRICULUM (Paper presented in the Working Group 11: "The Use of Technology in Mathematics Education" on the 9th International Congress on Mathematical Education, ICME 9, in TOKYO – Makuhari, July 31–August 6, 2000). In: BEITRÄGE zum COMPUTEREINSATZ in der SCHULE (ISSN 0932-2736), Heft 2, September, S. 9-15

Chancen und Probleme des Zugmodus

Rudolf Sträßer, Bielefeld & Gießen

After some introductory remarks on geometry (including a semiotic perspective on it), the various dragmodes of Dynamical Geometry Software (DGS) are analysed. Examples and a classification of the use of the dragmode in learning geometry lead to a discussion if the stability under the dragmode can be taken as a criterion of the correctness of a construction. Remarks on the importance of the dragmode for using geometry to plan, visualise and control societal production and distribution conclude the paper.

1 Vorspiele

1.1 Vorspiel 1: „relationale" und „deskriptive" Geometrie

Wie der Name schon sagt soll mit Dynamischer Geometrie Software (im Folgenden kurz: „DGS") vor allem Geometrie betrieben werden. Dieses Wissensgebiet hat nun mindestens zwei Facetten:

Zum einen ist Geometrie (als Teilgebiet der Universitätswissenschaft Mathematik) ein Gefüge logischer Relationen über einer Grundmenge. Dieses Teilgebiet stammt historisch aus der Analyse des uns umgebenden Raumes, hat aber schon vor Jahrtausenden im klassischen Griechenland begonnen, diesen Ursprung abzustreifen (für eine kurze Schilderung dieses historisch einmaligen Ablöseprozesses vgl. etwa Heilbron 1998, S. 1 ff.). Felix Klein hat dann die Geometrie als Invariantentheorie über einer Grundmenge formuliert, laut den Elementen einer Mathematikgeschichte von Bourbaki ist Geometrie heute ein Lexikon vielfältig einsetzbarer Begriffe, welches in höchst unterschiedlichen Teilgebieten der Wissenschaft Mathematik genutzt wird (vgl. Dieudonné 1981). Diese Facette heißt im Folgenden kurz die „relationale" Seite der Geometrie.

Andererseits - und in der Universitätsmathematik gerne vergessen (vgl. den Text von Grunbaum 1983) ist Geometrie eine in der Gesellschaft verbreitet genutzte Technik zur Planung, Herstellung und Kontrolle von Produktion und Distribution. Hierzu werden immer feinere Artefakte und Mittel zur Geometrie-Nutzung (von Zirkel&Lineal über Zeichentische des technischen Zeichnens bis zum Computer Aided Design „CAD") geschaffen. Mit diesen geometrischen Mitteln kommt der Mensch in die Geometrie (zum Technik-Begriff vgl. die einschlägigen Texte von Rabardel 1995, Verillon 1994). Diese Facette heißt im Folgenden kurz die „deskriptive" Seite der Geometrie. Anklänge an das Werk von Gaspard Monge, dem Gründer der „deskriptiven Geometrie" als Teilgebiet der wissenschaftlichen Geometrie, sind bei dieser Wortwahl durchaus erwünscht, zeigen sie doch an, daß die gesellschaftliche Nutzung der Geometrie für die Entwicklung der „relationalen" Geometrie keineswegs irrelevant war.

Im Laufe des vorliegenden Textes wird sich herausstellen, daß der Zugmodus der DGS vor allem in seinen Auswirkungen auf die „relationale“ Geometrie untersucht ist. Für diese relationale Geometrie ist nun eine Unterscheidung hilfreich, die im folgenden Abschnitt erläutert wird, nämlich die zwischen „Zeichnung“ und „Figur“.

1.2 Vorspiel 2: „Zeichnung“ und „Figur“

Um Geometrie zu betreiben, verfügt man über mehrere Zeichensysteme, von denen das bekannteste die Zeichnung selbst ist. Die Zeichnung scheint das System zu sein, welches für die Analyse von räumlichen Beziehungen, von „deskriptiver“ Geometrie, am geeignetsten ist, während sich für die Untersuchung der Relationen eher die natürliche, vor allem aber eine formalisierte Sprache anbietet. In erster Annäherung (vgl. Abb. 1) liefert das eine binäre semiotische Beziehung zwischen Zeichnungen (und/oder anderen Zeichensystemen wie einem Konstruktionstext, jedenfalls einer materialisierten, meist graphischen Darstellung des geometrischen Objekts), und der Figur als dem Ausdruck für das, was bezeichnet ist (dem Geflecht geometrischer Relationen, die z.B. durch den Konstruktionstext definiert sind). Meines Wissens war Bernard Parzyzs der erste, der diese Beziehung zuerst herausgestellt hat (vgl. Parzysz 1988, S. 80), Er unterscheidet dort nämlich die „Zeichnung“ (die tatsächliche, graphische Darstellung des geometrischen Objekts; im englischen Original: „drawing“) von der „Figur“ (im Original: „figure“), „dem geometrischen Objekt, welches durch den Text, der es definiert“, beschrieben ist.

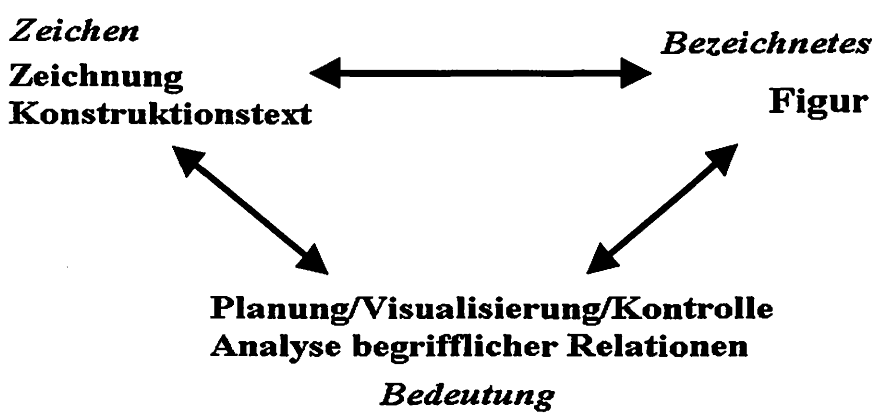


Abbildung 1: Zeichen und Bezeichnetes

Die Wahrnehmung spielt hier in erster Linie die Rolle eines Vermittlers zwischen Figur und Zeichnung - und kann die Interaktion zwischen Zeichen und Bezeichnetem erleichtern oder erschweren. Auf der dritten, der Bedeutungsebene finden sich dann wieder die beiden Facetten der Geometrie aus dem vorigen Abschnitt.

DGS bietet dem Geometrie-Treibenden nun ein neues Zeichensystem, das allerdings ein gewisses „Eigenleben“ besitzt. Der folgende Abschnitt zum Zugmodus der DGS zeigt eine auch für den ungeübten Nutzer schnell auffällige Seite dieses Eigenlebens auf.

2 Zugmodus: Entscheidungen der Entwickler

Auch wenn immer wieder der Zugmodus - neben Makro-Bildung und Ortslinien-Funktion - als wesentliches Merkmal von DGS angeführt wird (vgl. z.B. Graumann u.a. 1996, S. 197), so ist diese wohl bekannteste Funktionalität von DGS keineswegs so einheitlich, wie die einheitliche Bezeichnung nahelegt. Dazu einige Beispiele:

2.1 Variationen des Zugmodus

In der Literatur zu DGS wird immer wieder das Verhalten eines Punktes „auf" einer Strecke diskutiert (m. E. zuerst in der Dissertation von Hölzl 1994). Die meisten DGS (wie Cabri-géomètre, Cinderella) plazieren einen an eine Strecke AB gebundenen Punkt G so, daß das Verhältnis der Teilstrecken AG und GB unverändert bleibt, wenn die Punkte A bzw. B im Zugmodus variiert werden. Demgegenüber konstruiert GEOLOG den neuen Punkt C, auf einer Strecke AB, (also nach Ziehen von B zu B',) so, daß das Dreieck ACC', bei C, einen rechten Winkel besitzt (C' ist die orthogonale Projektion von C auf AB'; vgl. Holland 1997, S. 46).

Tatsächlich ist der Sachverhalt noch verwickelter, weil es für die Endlage eines Punktes in GEOLOG offensichtlich auch noch auf die Anzahl der dazwischen angefertigten Zeichnungen und damit auf die Geschwindigkeit des gezogenen Basispunktes und der Hardware ankommt (als Illustration vgl. nachstehende mit GEOLOG, Version 4.2 von 1999 entstandene Abb. 2, bei dem während der Variation von B die Trägerstrecke AB versteckt worden ist, während an B zunächst sehr schnell, dann langsam gezogen wurde).

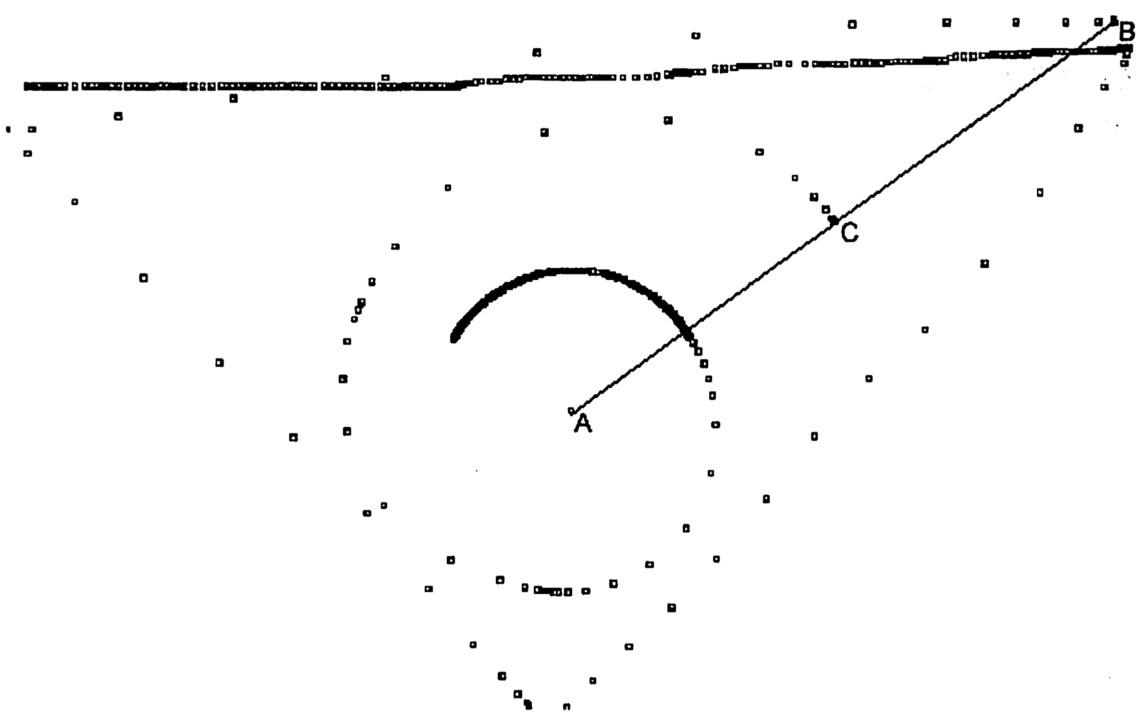


Abbildung 2: Verhalten eines Objektpunktes auf der Strecke AB

Ein analoges Problem stellt sich einem Entwickler für die Plazierung eines Punktes auf einem gegebenen Kreis. Bei Cindarella wie Cabri fällt wiederum die gleiche Designentscheidung: Bei Variation des Kreises wird ein „Objektpunkt“ (für diese Wortwahl vgl. Hölzl 1994, S. 74) so auf dem Kreis plaziert, daß der zugehörige Radius mit einer Bildschirm-Horizontalen immer denselben Winkel einschließt. Auch hier verhält sich GEOLOG anders, indem es den Abstand zwischen der ursprünglichen und der Lage nach jedem Neuaufbau der Zeichnung minimiert (so jedenfalls mein visueller, vom Entwickler telefonisch bestätigter Eindruck; gedruckte Informationen stehen mir hierzu nicht zur Verfügung.

Als allgemeine Feststellung kann notiert werden: Der Zugmodus verschiedener DGS wirkt durchaus verschieden.

2.2 Beispiel: das gleichseitige Dreieck im Quadrat

Nun könnte man fragen, ob sich diese Unterschiede überhaupt beim Treiben von Geometrie bemerkbar machen. Hölzl hat hierzu schon 1994 ein inzwischen gut untersuchtes Beispiel angegeben. Soll man nämlich einem Quadrat ABCD ein gleichseitiges Dreieck EFG einbeschreiben, so liefert die Konstruktion eines Quadrates ABCD, die Plazierung der Punkt E und F auf zwei anliegenden Quadratseiten, die Konstruktion eines Punktes G für das gleichseitige Dreieck EFG und dann Ziehen an E oder F die nebenstehende "Lösung" der Aufgabe.

In Cabri-géomètre kann an den Eckpunkten des Quadrates gezogen werden, ohne diese Lösung zu zerstören - die Punkte E, F und G des Dreiecks bleiben auf den Quadratseiten. Für Cindarella ergeben sich übrigens erwartungsgemäß keine anderen Phänomene.

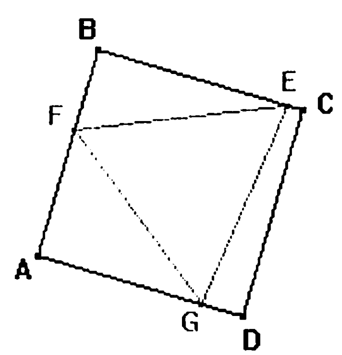


Abbildung 3: Einbeschriebenes Dreieck in Cabri-géomètre

In GEOLOG wirkt sich diese Konstruktion natürlich anders aus, „dieselbe“ Zeichnung würde in GEOLOG sofort als falsch entlarvt, weil nach Ziehen an den Eckpunkten des Quadrates die Seite G nicht mehr auf einer der Quadratseiten zu liegen kommt.

Geht man von einem an E und F auf Quadratseiten gezogenen gleichseitigen Dreieck EFG aus, so daß G auch auf einer Quadratseite liegt (vgl. Abbildung 4, linke Seite) und bewegt dann den Punkt B (einigermaßen langsam, Geschwindigkeit spielt nun eine Rolle! siehe Abschnitt 2.1) auf einem Kreis um A zweimal in der Runde, so ergibt sich die rechts stehende Zeichnung der Abbildung 4. An diesem Beispiel läßt sich übrigens eine für alle DGS wesentliche Regel für den Zugmodus als Gütekriterium einer Konstruktion ablesen. Die Korrektheit einer Konstruktion ist nur dann gewährleistet, wenn man an ALLEN möglichen Punkten ziehen kann, ohne die Zeichnung zu „zerstören“.

Abbildung 4: Einbeschriebenes Dreieck in GEOLOG

3 Mit dem Zugmodus lernen

Bis hierhin wurde der Zugmodus betrachtet, ohne seine Nutzer in den Blick zu nehmen. Eröffnet der Zugmodus einem Nutzer / einer Nutzerin von DGS neue Möglichkeiten? Dazu im Folgenden Beispiele und allgemeinere Aussagen aus der mathematikdidaktischen Forschung.

3.1 Beispiele

Ein sehr bekanntes Beispiel für die Nutzung des Zugmodus beim Lehren & Lernen von Geometrie ist das Mittenviereck von Vierecken, auch bekannt unter dem Namen "Varignon-Viereck". Hierbei geht es um den in der Geometrie wohlbekannten Satz, daß durch geeignete Verbindung der Seitenmitten eines Vierecks ABCD wiederum ein Viereck EFGH entsteht.

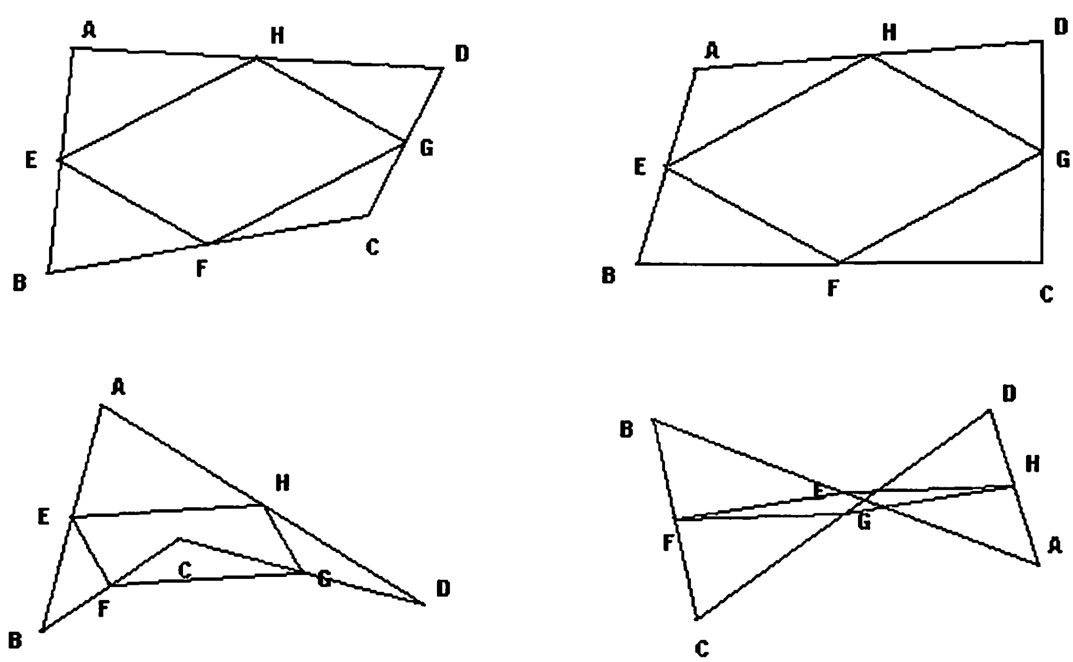


Abbildung 5: "Varignon-Viereck"

Dieses Mittenviereck ist aber „immer“ ein Parallelogramm (vgl. die vorstehende Abbildung 5). Überraschend an dieser Aussage ist wahrscheinlich „nur“, daß sie offensichtlich auch für nicht-konvexe (vgl. die dritte Zeichnung), selbst für überschlagene Vierecke (vgl. die vierte Zeichnung) gilt. Im traditionellen Geometrie-Unterricht, ohne den Einsatz von DGS, kam diese Aussage in der Regel gar nicht zur Sprache, erst ihre leichte Visualisierung mit Hilfe von DGS macht dieses Aussage zu einem guten Kandidaten für den Geometrie-Unterricht der Sekundarstufe I, nicht zuletzt weil sie mit Hilfe einer Diagonalen des Ursprungsvierecks ABCD und dem Satz vom Mittendreieck leicht beweisbar ist. An diesem Beispiel lässt sich gut belegen, daß der Zugmodus ein äußerst taugliches Werkzeug ist, eine Fülle von Beispielen für eine Aussage zu erzeugen, ja schnell auch Verallgemeinerungen (hier auf nicht-konvexe Vierecke) entdecken lässt, die traditionellerweise eher vernachlässigt würden. Analoge Beispiele lassen sich finden, in denen der Zugmodus das Auffinden von Grenzfällen und Gegenbeispielen erleichtert.

Der Zugmodus kann aber auch eine unerwartete heuristische Kraft entwickeln, wenn er professionell eingesetzt wird. Dazu ein Beispiel einer Problemlösung, wie sie mir aus der Vorbereitung auf Staatsexamensprüfungen berichtet wurde (für Einzelheiten vgl. Seutter&Sträßer 1997). Ein Lehramtsstudent stellte sich im Zuge der Prüfungsvorbereitungen die Aufgabe, gemeinsame „innere“ Tangenten an zwei nicht-kongruente Kreise zu konstruieren. Neben den traditionellen Zeichenhilfsmitteln stand ihm ein DGS zur Verfügung, außerdem kannte er aus einem Seminar zum Geometrie-Unterricht grundlegende heuristische Strategien.

Da er zunächst keine Lösungsidee hatte, zeichnete er sich eine Planfigur (vgl. Abbildung 6), indem er auf einer Tangente an den Kreis um M einen Punkt legte, darauf eine Senkrechte zeichnete und dann den Mittelpunkt N des zweiten Kreises auf diese Senkrechte plazierte.

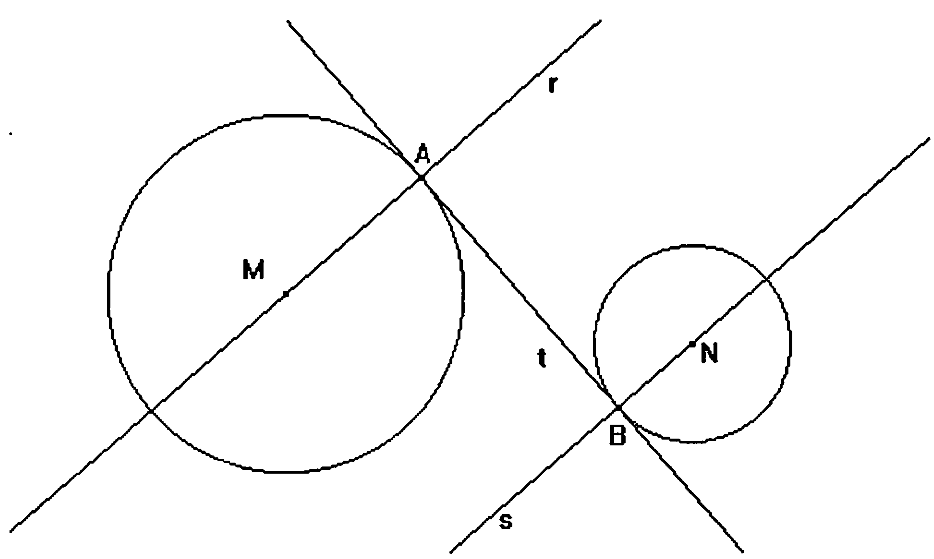


Abbildung 6: Planfigur

Zieht man bei dieser Planfigur, so stellt man schnell fest, daß die Berührradien der gemeinsamen Tangente jeweils parallel sind. Das nutzt man für die nächste Konstruktion, indem man zu gegebenen Kreisen um M und N auf dem Kreis um M irgendeinen Punkt A legt, eine Parallele zur Geraden MA durch N zeichnet und so den Punkt B erhält (man folgt der heuristischen Strategie „Weglassen einer Bedingung“). Verbindet man A und B, so erhält man zum Beispiel die Abbildung 7 mit der Geraden „sek“ als Sekante beider Kreise.

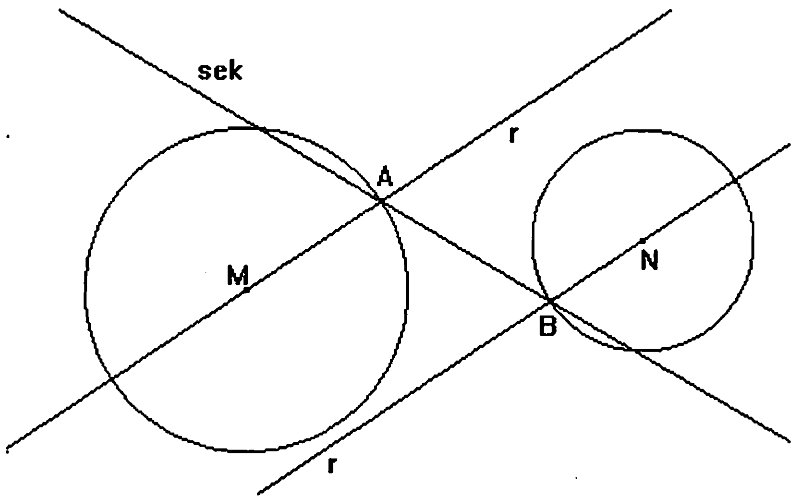


Abbildung 7: „Tastendes Ziehen“

Variiert man die Sekante „sek“ durch Ziehen an A, so sieht man, daß die Sekante „zwischen“ M und N einen Fixpunkt hat, der auf der Geraden durch M und N liegt. Auch die Tangente (durch Ziehen erzeugbar) geht durch diesen Fixpunkt. Diese Erkenntnis münzt man in eine Konstruktion dieses Fixpunktes S um und kann dann die gesuchte Tangente zeichnen (vgl. Abbildung 8). Der Beweis der Richtigkeit der Konstruktion ist übrigens relativ „einfach“ mit Hilfe einer zentrischen Streckung an S, die M auf N abbildet. Eine Variation der Konstruktion für die äußeren Tangenten ist dann einfach: Man verbindet A mit dem zweiten Schnittpunkt von Durchmesser und Kreis.

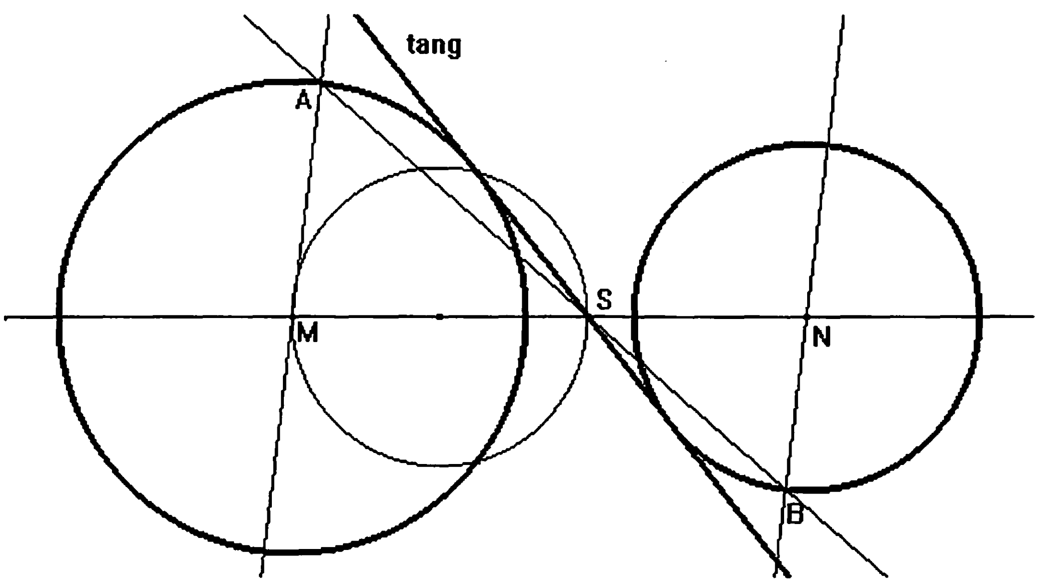


Abbildung 8: Gemeinsame innere Tangenten an zwei Kreise

Man sieht an den Beispielen: bei entsprechendem Einsatz und Kenntnissen kann der Zugmodus

- die Exploration / Problemlösung wesentlich stützen, (→ Heuristik)
- (Gegen-)Beispiele erzeugen
- einen Beweis herausfordern / Beweisideen nahelegen, allerdings nicht „automatisch“ liefern.

3.2 Verwendungsweisen

In Ergänzung zu diesen (und anderen) Beispielen liegen inzwischen Fallstudien (zum Teil aus laufendem Unterricht, zum Teil aus Laborstudien) vor, die detailliert und empirisch fundiert Aussagen darüber machen, wie Lernende und Geometrie-Treibende den Zugmodus bei Problemlösungen einsetzen. Für eine Klassifikation am interessantesten scheinen mir dabei italienische Arbeiten zu sein (vgl. Arzarello et al. 1998a und 1998b). Hier wird eine Dreiteilung von Verwendungsweisen des Zugmodus angeboten, die mit dem verbreiteten „Probieren, was passiert" beginnt (vgl. Arzarello 1998a, S. 2-34; im Original „wandering dragging" genannt). Ich werde diese weit verbreitete Nutzung des Zugmodus „tastendes Ziehen" nennen. Typisch für dieses Nutzung des Zugmodus ist eine eher unkontrollierte Bewegung ziehbarer Punkte auf dem Bildschirm, die noch nicht von einer bestimmten geometrischen Vermutung kontrolliert wird.

Der Übergang zur nächsten Phase des Ziehens ist dann durch eine Abduktion einer geometrischen Vermutung markiert (für eine kurze Erklärung dieser „Schlussweise" vgl. Arzarello u.a. 1998b, S. 2-29; in semiotisch orientierten Theoretisierungen der Mathematikdidaktik spielt diese von C. S. Peirce eingeführt Schlußweise eine zentrale Rolle; vgl. etwa schon Voigt 1984, neuerlich wieder Hoffmann 2001). Entsprechend einer solchen Vermutung wird nun an Basis- oder Objektpunkten gezogen, um die Vermutung zu bestätigen bzw. zu widerlegen oder Grenzfälle zu entdecken. Dieses gezielte Ziehen in einem vermuteten Gültigkeitsraum einer Vermutung wird von mir „bestätigendes Ziehen" genannt (Arzarello u.a. 1998, S. 2-34, nennen es „lieu muet dragging" und erinnern so daran, daß der Nutzer auf diese Weise einer unsichtbaren Ortslinie zu folgen versucht, auf der die Vermutung bestätigt wird). Als Beispiel geben die Autoren die Phase des Ziehens an, wenn bei der Frage nach dem Schnitt aller Winkelhalbierenden eines Vierecks in einem Punkt versucht wird, das Viereck auf seinem Umkreis zu ziehen, weil das Viereck ein Sehnenviereck sein muß, damit die Bedingung der Konkordanz der Winkelhalbierenden erfüllt ist.

Hat sich der DGS-Nutzer dann von der Richtigkeit seiner Vermutung überzeugt, so wird er eine entsprechende Konstruktion erstellen und diese zum Test der Richtigkeit seiner Vermutung nach allen Regeln der Kunst ziehen. Ich nenne das „kontrollierendes Ziehen", welches sich vom „bestätigenden Ziehen" dadurch unterscheidet, daß die Konstruktion nun derart ausgeführt ist, daß die Vermutung mit Notwendigkeit erfüllt werden soll oder wird.

Aus einem anderen Blickwinkel und ohne den Begriff „lieu muet dragging" zu benutzen gibt Healy (2000) weitere Beispiele unter dem Stichwort „soft constructions". Sie zeigt nämlich, daß beim Lösen von einfachen Konstruktionsproblemen es eine zielführende Strategie sein kann, zunächst eine geforderte Eigenschaft der Konstruktion außer Acht zu lassen, in diesem so geschaffenen Raum allgemeinerer Lösungen zunächst „tastend" zu ziehen, um so Ideen für eine „robust construction" zu finden, die durch Ziehen nicht zerstört werden kann. „Soft constructions" und gezieltes Suchen im Lösungsraum können heuristisch gewinnbringender sein als Ziehen zum Test der mathematischen Korrektheit. „Robust constructions" sind nur das Ziel, der Weg dorthin führt oft über das Weglassen einer Bedingung an die endgültige Lösung (ein aus der Didaktik der Geometrie wohlbekanntes Verfahren; vgl. etwa Holland 1996, S. 124 ff; im Zusammenhang mit DGS auch Goldenberg 1999; auch das zweite Beispiel im vorigen Abschnitt setzt genau auf diese Heuristik). Als Folgerung bleibt festzuhalten: Mindestens für die Phase der Exploration und Lösungssuche sollten „soft constructions" und/oder „gezieltes Suchen" (wie „bestätigendes Ziehen") eher geschätzt und nicht abgewertet werden.

4 Zugmodus: Kriterium der Korrektheit?

Im „kontrollierenden Ziehen" des Abschnittes 3.2 wechselt der Zugmodus unter der Hand seine Rolle in der Geometrie: Von einer Hilfe zum Problemlösen, einem zusätzlichen heuristischen Mittel wandelt sich der Zugmodus zu einem Beweismittel. In der unterrichtlichen Praxis wie in der Literatur finden sich entsprechende Hinweise, die in der Regel zusammengefaßt werden (können): „Wenn die Konstruktion Zugmodus-resistent ist, ist sie korrekt!" (vgl. etwa implizit das „messing up" von Healy&Hoyles 1999 oder explizit Mariotti 1999). A. Pesci (2000, S. 4-74f) drückte diese Vorstellung so aus: „... to construct a figure in this environment means carrying out a construction which passes the ‚dragging test' ... if we begin to impose necessary conditions for a figure, their sufficiency is proved as soon as they pass the dragging test ...".

4.1 Kriterium der mathematischen Korrektheit?

Cabri-géomètre hat wohl als erste DGS eine Funktionalität angeboten, mit der man prüfen konnte, ob eine Konstruktion neben den in der Konstruktion explizierten Relationen weitere geometrische Eigenschaften besitzt. Einfaches Beispiel ist die Folgerung, daß die Orthogonalität zweier Geradenpaare f und g sowie g und h zur Parallelität von f und h führt. In Cabri II läßt sich bekanntlich prüfen, ob drei Punkte kollinear sind, die Parallelität bzw. Orthogonalität zweier Geraden, die Gleichheit des Abstandes zweier Punktepaare und die Frage, ob ein Punkt notwendig auf einem anderen geometrischen Objekt liegt. Wie entscheidet die DGS diese Fragen, die man ja auch als Aussagen über die Gültigkeit eines geometrischen Satzes lesen kann?

Die Diskussionen während des Workshops „Dynamic Geometry Software" im Dezember 2000 in Oberwolfach ergaben nun, daß die „Beweiser" sowohl in Cabri-géomètre als auch in Cinderella im Wesentlichen mit der oben genannten Regel arbeiten: Die Programme ziehen automatisch und mehrfach an Basis- bzw. Objektpunkten und prüfen dabei, ob die zu prüfende Eigenschaft erhalten bleibt. Diese „randomisierten Beweiser" sind also technische Realisierungen der Regel „Wenn eine Eigenschaft durch vielfältiges Ziehen nicht zerstörbar ist, so gilt sie allgemein". Mathematische Sätze erlauben dann sogar Wahrscheinlichkeitsaussagen über die Sicherheit solcher geometrischer Sätze und zeigen, daß die DGS in aller Regel korrekte Einschätzungen zu den Konstruktionen liefern. Dennoch ist festzuhalten, daß hier mit Hilfe des Zugmodus keine formalen Beweise geliefert werden, sondern eine praktische Überprüfung sehr vieler Fälle stattfindet, die mit einer Aussage abgeschlossen wird, die traditionell in der Mathematik erst nach einem formalen Beweis im Rahmen einer axiomatischen bzw. axiomatisierbaren Theorie getroffen wird. Auf diese Weise wird umfassendes Ziehen zum Wahrheitskriterium, die Spielregeln der Mathematik werden unter der Hand geändert.

4.2 Kriterium der unterrichtlichen Korrektheit?

In der Folge des Abschnittes 4.1 stellt sich für den Einsatz von DGS beim Geometrie-Lehren und Geometrie-Lernen schnell die Frage, ob dieses veränderte und damit neue Kriterium der Korrektheit erwünscht ist. Die Antworten auf diese Frage sind meines Erachtens durchaus widersprüchlich und lassen eine generelle Einschätzung dieser Verfahrensweise kaum zu.

Falls diese Veränderung der Beweislogik dem Nutzer der DGS durchsichtig und bewußt ist, spricht m. E. wenig gegen eine auch extensive Nutzung dieser DGS-Funktionalität. Gerade in explorativen und heuristischen Phasen einer Problembearbeitung kann es sehr hilfreich sein, eine große Sicherheit über Zwischenschritte zu haben, ohne für die Gewinnung einer solchen Sicherheit zu viel Zeit durch Erarbeiten eines formalen Beweises aufzuwenden. Es bleibt hier allenfalls gegen die Realisierung dieser Funktionalität der Einwand, daß die Veränderung der Beweislogik in der Darstellung der DGS nicht wirklich markiert ist. In Cabri II heißt es beispielsweise einfach „Die Objekte sind parallel", was eine Deutung als im formalen Sinne bewiesene Aussage nahelegt.

Ambivalenter dürfte die Einschätzung ausfallen, wenn diese Veränderung der Beweislogik dem Nutzer *nicht* einsichtig und klar ist - und das dürfte in der Mehrzahl der Fälle zutreffen. Formale Beweise waren für die Mehrheit der Schülerinnen und Schüler schon immer unzugänglich (vgl. z.B. die Einschätzung von Holland 1996, S. 12f, zur „Geometrie als Beispiel einer deduktiven Theorie": „... in erster Linie für das Gymnasium relevant ... für die Hauptschule ... nahezu bedeutungslos ... kaum diskutabel"). In der Geometrie der Sekundarstufe I war und ist diese Veränderung demnach schon deshalb nicht markierbar, weil die Mehrheit der Geometrie-Treibenden den Unterschied zwischen formalen Beweisen und randomisierten Beweisen nicht verstehen werden, weil sie keinen entwickelten Begriff von formalen Beweisen haben. Hier galt schon immer und gilt dann weiter, nur technisch besser realisiert und damit effektiver die pragmatische Regel: „Gut ist, was funktioniert!".

5 Zugmodus und „deskriptive" Geometrie

Sieht man die Legitimität der Geometrie und ihres Unterrichts vor allem in der gesellschaftlichen Nutzung der Geometrie, also in der „deskriptiven" Geometrie, so relativiert sich die Argumentation des vorigen Abschnittes zusätzlich. Dort wurde ja ausschließlich im Sinne der „relationalen" Geometrie argumentiert.

Für die gesellschaftliche Verwendung der Geometrie, für die „deskriptive" Geometrie nun ist der Zugmodus offensichtlich ein Segen. Auf einer zunächst einmal sehr oberflächlichen Ebene erlaubt der Zugmodus das leichte, spielerische Ändern von Zeichnungen und macht die Geometrie zu einem zugänglichen und vielfältig nutzbaren Hilfsmittel von Planung, Visualisierung und Kontrolle gesellschaftlicher Problemlösungen. Der Zugmodus fügt allerdings der traditionellen Geometrie des Zeichenblattes eine Dimension hinzu, nämlich die der Beweglichkeit und der Möglichkeit, solche Bewegungen zu simulieren. Mit Hilfe des Zugmodus der DGS findet der Nutzer einen leichteren Zugang zur konstruktiven Geometrie etwa in der Technik. Vor allem die kinematische Geometrie erschließt sich so in einem ohne DGS unvorstellbaren Ausmaß. Neben dem bekannten „Scheibenwischer"-Beispiel des Handbuches von THALES sei daher zum Schluß noch ein Beispiel aus diesem Bereich dargestellt: die Inversoren von Watt und Peaucellier. Wittmann (1987, S. 170ff) berichtet, Watt sei weniger auf die Erfindung der Dampfmaschine als auf die seines Inversors stolz gewesen, mit dem er die Geradführung der Kolbenstange angenähert realisieren konnte (für eine Simulation mit Hilfe von DGS vgl. Abbildung 9, linke Zeichnung). Erst nahezu ein Jahrhundert später hat dann der französische General Peaucellier eine exakte Geradführung angegeben (vgl. die rechte Zeichnung in Abbildung 9; die Ortslinien-Funktion der DGS macht die zurückgelegte Bahnkurve jeweils sichtbar, die Kinematik ist leider im notwendig statischen Druck einer Buchseite nicht darstellbar). Dieser Peaucelliersche Inversor beruht auf einer „einfachen" geometrischen Abbildung, der Inversion am Kreis, die ja bekanntlich geeignet liegende Geraden in Kreise (und umgekehrt) abbildet.

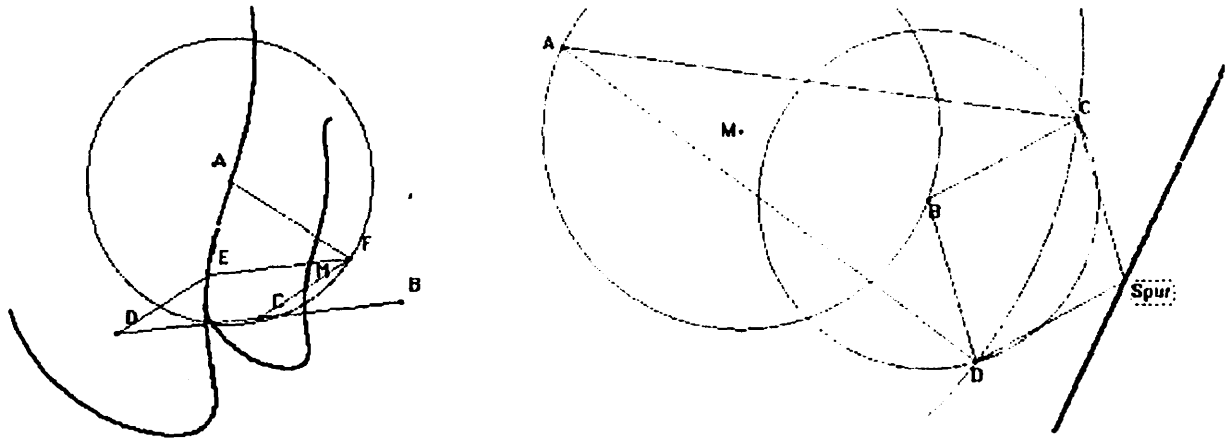


Abbildung 9: Inversoren von WATT bzw. PEAUCELLIER

Literatur

Arzarello, F., C. Micheletti, et al. (1998a). Dragging in Cabri and Modalities of Transition from Conjectures to Proofs in Geometry. Psychology of Mathematics Education 22, Stellenbosch, South Africa, Bd. 2, S. 2-32 - 39.

Arzarello, F., C. Micheletti, et al. (1998b). A Model for Analysing the Transition to Formal Proofs in Geometry. Psychology of Mathematics Education 22, Stellenbosch, South Africa, Bd. 2, S. 2-24 - 2-31

Dieudonne, J. (1981). The universal domination of geometry. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 13(1), 5 - 7.

Goldenberg, E. P. (1999). Getting Euler's Line to Relax. Cabri World Conference 1, Sao Paulo.

Graumann, G., Hölzl, R., Krainer, K., Neubrand, M., & Struve, H. (1996). Tendenzen der Geometriedidaktik der letzten 20 Jahre. Journal für Mathematikdidaktik, 17(3/4), 163 - 237.

Grunbaum, B. (1983). Shouldn't We Teach Geometry ? In M. Zweng u.a. (Hrsg.), Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education (S. 165 - 167). Boston - Basel - Stuttgart: Birkhäuser.

Healy, L., & Hoyles, C. (1999). Visual and Symbolic Reasoning in Mathematics: Making Connections With Computers? Mathematical Thinking and Learning, 1(1), 59 - 84.

Healy, L. (2000). Identifying and explaining geometrical relationship: Interactions with robust and soft Cabri constructions. 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 24), Hiroshima, Bd. 1, S. 1-103 - 1-117.

Heilbron, J. L. (1998). Geometry Civilized. Oxford: Oxford University Press.

Hölzl, R. (1994). Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer. Weinheim: Deutscher Studien Verlag.

Hölzl, R. (1999). Qualitative Unterrichtsstudien zur Verwendung dynamischer Geometrie-Software. Math.-naturw. Fakultät der Universität Augsburg (Habilitationsschrift).

Hoffmann, M. (2001). Skizze einer semiotischen Theorie des Lernens. Vortrag auf der Tagung für Didaktik der Mathematik in Ludwigsburg (erscheint in "Beiträge zum Mathematikunterricht 2001").

Holland, G. (2. Aufl. 1996). Geometrie in der Sekundarstufe. Heidelberg; Berlin; Oxford, Spektrum Akademischer Verlag.

Holland, G. (1997). Führt der Einsatz von DGS zu einem anderen Verständnis von Geometrie? In H. Hischer (Ed.), Computer und Geometrie - neue Chancen für den Geometrieunterricht ? Bericht über den Arbeitskreis "Mathematikunterricht und Informatik" in der GDM vom 20. bis 23. September 1996 in Wolfenbüttel (S. 40 - 48). Hildesheim: Franzbecker.

Mariotti, M. A. (1999). Cabri, la construction géométrique et le problème de la démonstration. X° Ecole d'Été de Didactique des Mathématiques 1999, Houlgate, France, IUFM, Académie de Caen.

Parzysz, B. (1988). «Knowing» vs. «seeing». Problems of the plane representation of space geometry figures. Educational Studies in Mathematics 19(1): 79 -92.

Pesci, A. (2000). The properties of necessity and sufficiency in the construction of geometric figures with Cabri. 24th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME 24), Hiroshima. Bd. 4, S. 4-73 - 4-80.

Rabardel, P. (1995). Les hommes et la technologie. Approche cognitive des instruments contemporains. Paris, Armand Colin.

Seutter, R. and R. Sträßer (1997). Gemeinsame Tangenten zweier Kreise - die Geschichte einer computerunterstützten Entdeckung. SeDiMa Wintersemester 96/97 - Sonderausgabe zum 60ten Geburtstag und zum 25jährigen Dienstjubiläum an der Universität Bielefeld Heinz Althoff: S. 79 - 82.

Vérillon, P. (1994). Approche didactique du dessin industriel. Grenoble, Vortrag am IUFM Grenoble.

Voigt, J. (1984). Interaktionsmuster und Routinen im Mathematikunterricht - Theoretische Grundlagen und mikroethnographische Falluntersuchungen. Weinheim, Beltz.

Wittmann, E. C. (1987). Elementargeometrie und Wirklichkeit: Einführung in geometrisches Denken. Braunschweig: Vieweg.