Lösungen zum Arbeitsblatt „Fläche zwischen zwei Funktionen“

Aufgabe 3

a) Schnittstellen: $f(x) = g(x)$

$$-x^2 + 4x = m \cdot x$$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 4x - mx = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-x + 4 - m) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee -x + 4 - m = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \ \vee x = 4 - m$$

Rote Fläche: $A[0; 3{,}5] = \int_0^{3{,}5} |-x^2 + 4x - 0{,}5x| dx = \left| \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3{,}5}{2}x^2 \right]_0^{3{,}5} \right| \approx 7{,}15\ [FE]$

Grüne Fläche: $A[3{,}5; 4] = \int_{3{,}5}^{4} |0{,}5x + x^2 - 4x| dx = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{3{,}5}{2}x^2 \right]_{3{,}5}^{4} \right| \approx 0{,}48\ [FE]$

b) $\int_0^{4-m} |-x^2 + 4x - mx| dx = \int_{4-m}^{4} |mx + x^2 - 4x| dx$

$$\Leftrightarrow \left| \left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{m}{2}x^2 \right]_0^{4-m} \right| = \left| \left[\frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + \frac{m}{2}x^2 \right]_{4-m}^{4} \right|$$

$$\Leftrightarrow \left| \left(-\frac{1}{3}(4-m)^3 + 2(4-m)^2 - \frac{m}{2}(4-m)^2 \right) - 0 \right|$$
$$= \left| \left(\frac{1}{3} \cdot 4^3 - 2 \cdot 4^2 + \frac{m}{2} \cdot 4^2 \right) - \left(\frac{1}{3} \cdot (4-m)^3 - 2 \cdot (4-m)^2 + \frac{m}{2} \cdot (4-m)^2 \right) \right|$$

$$\Leftrightarrow 0 = -\frac{32}{3} + 8\,m$$

$$\Leftrightarrow \frac{32}{3} = 8\,m$$

$$\Leftrightarrow \frac{4}{3} = m$$

Aufgabe 4

Tangentengleichung aufstellen:

$f(x) = 0{,}5x^2$

$f'(x) = x$ $\qquad m = f'(3) = 3$

$t(x) = 3x + b$ $\qquad P(3|4{,}5)$ $\qquad 4{,}5 = 3 \cdot 3 + b \Leftrightarrow b = -4{,}5$

$$\Longrightarrow t(x) = 3x - 4{,}5$$

Schnittstelle der Tangente mit der x-Achse:

$t(x) = 0 \qquad\qquad 3x - 4{,}5 = 0 \Leftrightarrow x = 1{,}5$

Berechnen des „Dreiecks":

$$A = \frac{1}{2} \cdot 1{,}5 \cdot 4{,}5 = 3{,}375$$

Berechnen der roten Fläche:

$$A = \int_0^3 |0{,}5x^2| dx - 3{,}375 = \left| \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^3 \right| - 3{,}375 = 4{,}5 - 3{,}375 = 1{,}125\ [FE]$$

Alternativer Weg: Einteilen der roten Fläche in zwei Bereiche

$$A = \int_0^{1,5} |0{,}5x^2| dx + \int_{1,5}^3 |0{,}5x^2 - (3x - 4{,}5)| dx = \left| \left[\frac{1}{6} x^3 \right]_0^{1,5} \right| + \left| \left[\frac{1}{6} x^3 - \frac{3}{2} x^2 + 4{,}5x \right]_{1,5}^3 \right|$$

$$A = \frac{9}{16} + \left(4{,}5 - \frac{63}{16} \right) = 1{,}125\ [FE]$$

Aufgabe 5

a) $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2$

Nullstellen berechnen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow\ x = -2,\ \ x = 0,\ \ x = 2$

$$A = \int_{-2}^{2} |f(x)| dx = \int_{-2}^{0} |f(x)| dx + \int_{0}^{2} |f(x)| dx = |F(0) - F(-2)| + |F(2) - F(0)|$$
$$= 4{,}27\ [FE]$$

b) $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2$

$g(x) = -2$

Schnittstellen berechnen: $f(x) = g(x) \Leftrightarrow\ x = -\sqrt{2},\ \ x = \sqrt{2}$

Flächeninhalt berechnen: $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} |(f(x) - (-2)| dx \approx 3{,}02\ [FE]$

c) $f(x) = 0{,}5x^4 - 2x^2$

$h(x) = -1{,}5$

Schnittstellen berechnen: $f(x) = h(x) \Leftrightarrow$ $x = -1{,}73,\ \ x = -1,\ \ x = 1,\ \ x = 1{,}73$

Flächeninhalt berechnen:

$$A = \int_{-2}^{2} |f(x)| dx - \int_{-1{,}73}^{-1} |-1{,}5 - f(x)| dx - \int_{1}^{1{,}73} |-1{,}5 - f(x)| dx$$

$$A \approx 4{,}27 - 0{,}241 - 0{,}241 = 3{,}788\ [FE]$$

Alternativer Weg:

$$A = \int_{-2}^{-1{,}73} |f(x)| dx + \int_{-1{,}73}^{-1} |h(x)| dx + \int_{-1}^{1} |f(x)| dx + \int_{1}^{1{,}73} |h(x)| dx + \int_{1{,}73}^{2} |f(x)| dx$$

$A = 3{,}788\ [FE]$